DURCH GRAPHENSÄTZE DEFINIERTE LOKALKONVEXE RÄUME

Volker Eberhardt

1972

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546016_0088

DURCH GRAPHENSÄTZE DEFINIERTE

LOKALKONVEXE RÄUME

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität in München

Vorgelegt von
Volker Eberhardt
aus München
am 13. Juni 1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Professor Dr. Walter Roelcke

2. Berichterstatter: Dozent Dr. Jürgen Batt

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Oktober 1972

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 4

Kapitel I : Minimal-α Räume und stark minimal-α Räume

§ 1 Grundlagen 7

§ 2 Duale Charakterisierung 21

§ 3 Vollständigkeit 34

§ 4 Produkte 44

§ 5 Beispiele 54

Nachwort zu Kapitel I 62

Kapitel II : GN-Räume und GM-Räume

§ 6 Charakterisierungen und Permanenzeigenschaften 63

§ 7 Spezielle Eigenschaften 79

§ 8 Eine verwandte Raumklasse 90

Literatur 101

EINLEITUNG

In den letzten Jahren beschäftigten sich mehrere Mathematiker mit denjenigen separierten lokalkonvexen Räumen E, für welche jede graphenabgeschlossene lineare Abbildung von einem tonnelierten Raum F nach E stetig ist (N. ADASCH [1], [4], V. EBERHARDT [11], M. VALDIVIA [37], [40]). Nimmt man hier statt der tonnelierten Räume F irgendeine Klasse α lokalkonvexer Räume, so erhält man Räume, die in dieser Arbeit minimal-α Räume genannt werden. Im ersten Teil der Arbeit wird untersucht, wieweit sich die vorliegenden Ergebnisse über minimal-tonnelierte Räume auf den allgemeinen Fall übertragen.

Entsprechend der Beziehung zwischen B- und B_r-vollständigen Räumen (s. [32]) definieren wir in §1 noch stark minimal-α Räume: Das sind diejenigen, für die alle separierten Quotienten minimal-α sind. Nach Klärung des Verhaltens solcher Räume bei Bildung von Teilräumen und stetigen Bildern stellen wir fest, unter welchen Bedingungen man sich in der Definition von minimal-α Räumen auf injektive oder bijektive Abbildungen beschränken kann. Dann behandeln wir das open-mapping-theorem. Es folgt eine auf Y. KOMURA [21] zurückgehende Charakterisierung der minimal-α Räume, die auch den Namen "minimal-α" motiviert. Bemerkungen zu konkret gegebenen Klassen α beschliessen den ersten Paragraphen.

In §2 charakterisieren wir (stark) minimal-α Räume durch ihren stetigen Dualraum. Dies gelingt uns für minimal-α Räume nur, falls alle Räume der gegebenen Klasse α die Mackeytopologie tragen. Für stark minimal-α Räume muss zusätzlich vorausgesetzt werden, dass jeder lineare Raum mit der gröbsten Topologie in α liegt.

In §3 wird eine Vollständigkeitsaussage über minimal-α Räume bewiesen und ihre Bedeutung für spezielle Klassen α diskutiert. Für die Klasse α der tonnelierten Räume zeigen wir unter anderem, wie einfach sich einige Theoreme von VALDIVIA [40] beweisen lassen.

Das Hauptergebnis von §4 ist der Satz, dass das Produkt eines minimal-lokalkonvexen Raums mit einem (stark) minimal-α Raum (stark) minimal-α ist. Ferner zeigen wir, dass das Produkt zweier stark minimal-tonnelierter Räume nicht notwendig stark minimal--tonneliert ist. Ein entsprechendes Beispiel für minimal-tonneliert fehlt.

§5 enthält einen Vergleich von minimal-tonnelierten, minimal--bornologischen und anderen Räumen. Weiter zeigen wir, dass sowohl stark minimal-quasitonnelierte Räume als auch metrisierbare minimal-bornologische Räume trivial, d.h. minimal-lokalkonvex sind. Offen bleibt die Frage nach einem nichttrivialen minimal-quasitonnelierten Raum.

Ansatzpunkt für den zweiten Teil dieser Arbeit ist eine Charakterisierung von M. MAHOWALD [26] für tonnelierte Räume: Ein separierter lokalkonvexer Raum E ist genau dann tonneliert, wenn jede graphenabgeschlossene lineare Abbildung von E in einen Banachraum stetig ist. Ersetzt man hier "Banachraum" durch "normierten Raum", dann ergeben sich spezielle tonnelierte Räume, die wir GN-Räume nennen (G für Graphensatz, N für normiert).

In §6 versuchen wir, diese Räume zu beschreiben und ihre Permanenzeigenschaften festzustellen. Die erste Charakterisierung besteht darin, ausser der Tonneliertheit zu fordern, dass jeder Quotient (nach einem linearen Teilraum) mit einer stetigen Norm die feinste l.k. Topologie besitzt (6.8). Dies ergibt sofort einen Einbettungssatz für GN-Räume in ein Produkt von Räumen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie (6.16). Schliesslich kennzeichnen wir den Dualraum eines GN-Raums durch eine Vollständigkeitsbedingung, der bei tonnelierten Räumen die Quasivollständigkeit des schwachen Duals entspricht (6.9). Die Vererbbarkeit der Eigen - schaft, GN-Raum zu sein, erstreckt sich auf lokalkonvexe direkte Summen (6.2), Quotienten (6.2), Produkte (6.4), tonnelierte Teilräume (6.14) und auf lineare Oberräume, in denen der gegebene GN-Raum dicht enthalten ist (6.13).

Eine Teilklasse der GN-Räume, sogenannte GM-Räume, erhält man, wenn in der Definition eines GN-Raums statt "normiert" nur "metrisierbar lokalkonvex" verlangt wird. Diese Räume zeigen im wesentlichen das gleiche Verhalten wie die GN-Räume; es fehlt lediglich ein Einbettungssatz, und das Produkt von separierten, von Null verschiedenen GM-Räumen ist nur für endlich viele Faktoren wieder ein GM-Raum. Ferner sind die beschränkten Mengen von separierten GM-Räumen endlich-dimensional (7.3). Ein ärgerlicher Zustand ist es jedoch, dass ich keinen nichttrivialen GM-Raum kenne, d.h. keinen separierten GM-Raum, der nicht die feinste lokalkonvexe Topologie trägt. In §7 werden verschiedene Ansätze besprochen, die auf ein nichttriviales Beispiel führen könnten. Dabei ergibt sich auch eine Charakterisierung nuklearer GN-Räume (7.5).

In §8 befassen wir uns mit den Analoga der GN- und GM-Räume für quasitonnelierte Räume. Und zwar ersetzen wir in der folgenden Charakterisierung quasitonnelierter Räume (MAHOWALD [26]) die Banachräume durch normierte bzw. durch metrisierbare lokalkonvexe Räume: "Ein separierter lokalkonvexer Raum E ist genau dann quasitonneliert, wenn jede b e s c h r ä n k t e graphenabgeschlossene lineare Abbildung von E in einen Banachraum stetig ist." Die Theorie der so bestimmten Räume ist weniger reichhaltig als die der GN- und GM-Räume. Im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen Produkte und Teilräume.

Eine Übersicht über die Beziehungen zwischen den im zweiten Teil definierten Räumen befindet sich am Ende des Paragraphen 8.

Den Herren Prof. Dr. Walter Roelcke und Dr. Helmut Pfister danke ich für ihre stete Anteilnahme am Fortschritt dieser Arbeit.

I. MINIMAL-α RÄUME UND STARK MINIMAL-α RÄUME

§1 GRUNDLAGEN

Definiert man zu einer Klasse α von l.k. (d.h. lokalkonvexen) Räumen einen minimal-α Raum E durch die Forderung, dass jede g-abgeschlossene (d.h. graphenabgeschlossene) lineare Abbildung von einem Raum aus α nach E stetig ist (vgl. [11; Teil 2]), so ist ein nichtseparierter l.k. Raum E trivialerweise minimal-α, da es keine g-abgeschlossene lineare Abbildung mit E als Ziel gibt. Eine angemessenere Berücksichtigung finden nichtseparierte Räume durch eine Abschwächung des Begriffs "g-abgeschlossen", die ich von H.-D. NIESSEN [28; (2.2)] übernehme.

1.1 Definition : Eine lineare Abbildung $f : E \to F$ zwischen zwei topologischen Vektorräumen E und F heisst f a s t a b g e s c h l o s s e n , wenn

$$\cap \{ \overline{f(U)} \mid U \text{ Nullumgebung in } E \} = \overline{\{0\}} .$$

Es genügt hier selbstverständlich, wenn die Mengen U eine Nullumgebungsbasis durchlaufen. Wir bringen nun eine Reihe von Charakterisierungen dieses Begriffs, deren Analoga für g-abgeschlossene Abbildungen wohlbekannt sind. Der Kürze halber bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von $\{0\}$ als den N u l l r a u m eines topologischen Vektorraums.

1.2 Lemma : Für eine lineare Abbildung $f : E \to F$, E , F l.k. sind äquivalent:

a) f ist fastabgeschlossen.
b) $E \to F \to F / \overline{\{0\}}$ (kanonisch) ist g-abgeschlossen.
c) $E / \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow F$ (kanonische Injektion) ist g-abgeschlossen.
d) Für jedes Netz (x_μ) in E , das gegen Null konvergiert und dessen Bildnetz $(f(x_\mu))$ in F gegen y konvergiert, gilt $y \in \overline{\{0\}}$.

e) Auf F existiert eine gröbere l.k. Topologie, für welche f stetig ist und die keinen grösseren Nullraum hat als F .

f) Die l.k. Finaltopologie auf F bzgl. f und id_F besitzt den gleichen Nullraum wie F .

g) $G(f) + \{0\} \times \overline{\{0\}} = \overline{G(f)}$; hierbei ist $G(f)$ der Graph von f.

h) $G(f) + \{0\} \times \overline{\{0\}}$ ist abgeschlossen in $E \times F$.

Der Beweis ist elementar und wird deshalb ebensowenig ausgeführt wie der der ersten drei Aussagen des folgenden Lemmas.

1.3 Lemma : Sei $f : E \to F$ fastabgeschlossen. Dann gilt:

a) f ist genau dann g-abgeschlossen, wenn F separiert ist.

b) Ist $g : G \to E$ linear und stetig, so ist $f \circ g$ fastabgeschlossen.

c) f bleibt fastabgeschlossen, wenn man die Topologie auf F verfeinert, ohne den Nullraum zu verkleinern. Auf E darf (nach Teil b) beliebig verfeinert werden.

d) f ist fastabgeschlossen für alle l.k. Topologien des dualen Paares (E,E') bzw. (F,F') .

e) Bei bijektivem f ist die inverse Abbildung genau dann fastabgeschlossen, wenn $f(\overline{\{0\}}^E) = \overline{\{0\}}^F$.

Beweis : d) Da die Abschlussbildung von konvexen Mengen nur vom dualen Paar abhängt [19; 17.1] , bedeutet die Bedingung in der Definition 1.1 für jede l.k. Topologie des dualen Paares (F,F') dasselbe. Wegen Teil c ist noch die Fastabgeschlossenheit von $f : (E,\sigma(E,E')) \longrightarrow F$ zu zeigen: Nach 1.2e existiert auf F eine gröbere l.k. Topologie s , für die $f : E \to (F,s)$ stetig ist und für die $\overline{\{0\}}^s = \overline{\{0\}}^F$ gilt. Da bekanntlich die Stetigkeit beim Übergang zu den assoziierten schwachen Topologien erhalten bleibt [19; 21.1] und auch der Nullraum bei diesem Übergang nicht verändert wird, erfüllt $f : (E,\sigma(E,E')) \longrightarrow F$ die Bedingung 1.2e .

e) Für jede fastabgeschlossene lineare Abbildung $f : E \to F$ gilt

$$\overline{\{0\}}^F = \cap \{ f(U) \mid U \} = \cap \{ f(U) + V \mid U, V \} ,$$

wobei U alle Nullumgebungen von E und V alle Nullumgebungen von F durchläuft. Daher ist

$$f^{-1}(\overline{\{0\}}^{F}) = \bigcap_{U,V} f^{-1}(f(U) + V) = \bigcap_{U,V} (U + f^{-1}(V)) =$$
$$= \bigcap_{V} \overline{f^{-1}(V)} .$$

Für bijektives f erhält man nun unmittelbar das Gewünschte.

q. e. d.

1.4 Definition : Sei E l.k. und α eine Klasse l.k. Räume.

a) E heisst m i n i m a l - α , wenn jede fastabgeschlossene lineare Abbildung von einem Raum aus α nach E stetig ist.

b) E heisst s t a r k m i n i m a l - α , wenn jeder Quotient von E (nach einem linearen Teilraum) minimal-α ist.

1.5 Satz : Sei α eine Klasse l.k. Räume. Dann gelten :

a) Ein l.k. Raum E ist genau dann (stark) minimal-α, wenn der zu E assoziierte separierte Raum $E / \overline{\{0\}}$ (stark) minimal-α ist.

b) Ein l.k. Raum E ist genau dann stark minimal-α, wenn jeder separierte Quotient von E minimal-α ist.

c) Jeder abgeschlossene lineare Teilraum eines (stark) minimal-α Raums ist (stark) minimal-α.

d) Ist (E,t) ein minimal-α Raum, so auch (E,s) für jede gröbere l.k. Topologie s auf E mit $\overline{\{0\}}^{s} = \overline{\{0\}}^{t}$.

e) Ein stark minimal-α Raum ist auch in jeder gröberen l.k. Topologie stark minimal-α.

f) Jedes stetige, lineare, l.k. Bild, insbesondere jeder Quotient eines stark minimal-α Raums ist stark minimal-α.

g) Tragen alle Räume in α die Mackeytopologie, dann gilt: Für einen (stark) minimal-α Raum (E,t) ist auch $\tau(t)$ [1] (stark) minimal-α.

---

[1]) Für einen l.k. Raum (E,t) sei $\tau(t)$ die zu t assoziierte Mackeytopologie (d.h. $\tau(t) := \tau(E,(E,t)')$) und $\sigma(t)$ die zu t gehörige schwache Topologie (d.h. $\sigma(t) := \sigma(E,(E,t)')$).

Beweis : Sei $E / \overline{\{0\}}$ minimal-α, $F \in \alpha$ und $f : F \to E$ fastabgeschlossen. Bezeichnet $p : E \longrightarrow E / \overline{\{0\}}$ die kanonische Abbildung, so ist nach 1.2 b $p \circ f$ g-abgeschlossen, also fastabgeschlossen (1.3 a). Nach Voraussetzung ist $p \circ f$ stetig, woraus die Stetigkeit von f folgt, da E die Initialtopologie bzgl. $p : E \longrightarrow E / \overline{\{0\}}$ trägt. Somit ist E minimal-α.

b) Eine Richtung ist trivial. Die Umkehrung folgt aus dem eben Bewiesenen, da der assoziierte separierte Raum eines Quotienten E / Q topologisch isomorph ist zu $E / \overline{Q}$.

a) Sei E stark minimal-α. Da jeder Quotient eines Quotienten von E topologisch isomorph ist zu einem Quotienten von E [7; III, §2.7, Kor. zu Satz 2.2], folgt, dass jeder Quotient von E stark minimal-α ist - insbesondere $E / \overline{\{0\}}$. Sei umgekehrt $E / \overline{\{0\}}$ stark minimal-α. Nach loc. cit. folgt, dass jeder separierte Quotient von E topologisch isomorph ist zu einem Quotienten von $E / \overline{\{0\}}$. Wegen Teil b) ist somit E stark minimal-α.

Für minimal-α ist die eine Richtung zu Anfang des Beweises gezeigt worden. Sei umgekehrt E minimal-α und $f : F \longrightarrow E / \overline{\{0\}}$ eine g-abgeschlossene, lineare Abbildung mit $F \in \alpha$. Wir wählen nun eine lineare Abbildung $r : E / \overline{\{0\}} \longrightarrow E$ mit der Eigenschaft, dass $p \circ r = \mathrm{id}_{E / \overline{\{0\}}}$ ($p : E \longrightarrow E / \overline{\{0\}}$ kanonisch). Nach Voraussetzung und 1.2 b ist $r \circ f$ stetig, daher auch $f = p \circ r \circ f$.

c) Ist L ein abgeschlossener, linearer Teilraum von E , so ist eine lineare Abbildung $f : F \to L$ genau dann fastabgeschlossen (bzw. stetig), wenn es $i \circ f$ ist; dabei ist $i : L \to E$ die Inklusionsabbildung. Dies zeigt die Behauptung für minimal-α. Hieraus und aus [7; III, §2.7, Satz 20] ("Ein Quotient L / Q eines (abgeschlossenen) Teilraums von E ist (abgeschlossener) Teilraum von E / Q ") folgt die Aussage über stark minimal-α Räume.

d) Folgt unter Beachtung von 1.3 c aus der Definition.

e) Sei (E,t) stark minimal-α, s eine l.k. Topologie auf E mit $s \leq t$. Für jeden s-abgeschlossenen linearen Teilraum Q erhält man aus Teil d) , dass der Quotient von (E,s) nach Q minimal-α ist. Nach Teil b) ist damit alles gezeigt.

f) Sei $f : E \to F$ eine stetige, surjektive lineare Abbildung

eines stark minimal-α Raums auf den l.k. Raum F. Da jeder separierte Quotient von F stetiges, bijektives Bild eines geeigneten Quotienten von E ist, folgt die Behauptung aus Teil d) und b).

g) Zum Beweis der Aussage über minimal-α sei $F \in \alpha$ und $f : F \to (E,\tau(t))$ fastabgeschlossen. Nach 1.3 d ist $f : F \to (E,t)$ fastabgeschlossen und somit nach Voraussetzung stetig. Nach [19; 21.1 und 21.4 i] ist f dann auch stetig für die assoziierten Mackeytopologien auf F und E, was zu zeigen war. Die Behauptung über stark minimal-α Räume folgt aus dem soeben Bewiesenen, denn die Quotiententopologie der Mackeytopologie ist gleich der Mackeytopologie der Quotiententopologie, d.h. $\tau(t) / Q = \tau(t / Q)$ (für unsere Zwecke reicht es, wenn alles separiert ist; dafür siehe [24; §22.2(3)] ; der allgemeine Fall wird in 2.4 bewiesen werden).

q. e. d.

Für die Klasse der tonnelierten Räume hat ADASCH gezeigt, dass ein separierter l.k. Raum E genau dann minimal-tonneliert ist, wenn jede b i j e k t i v e , g-abgeschlossene lineare Abbildung von einem tonnelierten Raum nach E stetig ist [1; 3.(2)] . Wir zeigen jetzt, wie sich dieser Sachverhalt verallgemeinern lässt. Dazu führen wir einige Redeweisen ein:

Gegeben sei eine Klasse α l.k. Räume. Die Elemente von α nennen wir <u>α-Räume</u>; ihre Topologien heissen <u>α-Topologien</u>; die assoziierten separierten Räume von α-Räumen seien die <u>α_0-Räume</u>; separierte Quotienten von α-Räumen heissen <u>α_1-Räume</u>; ein <u>α_2-Raum</u> ist ein separierter l.k. Raum (E,t) , zu dem es einen α-Raum F und eine lineare Abbildung $f : F \to E$ gibt, so dass t die l.k. Finaltopologie von F bzgl. f ist; Räume, deren Topologie die l.k. Finaltopologie bzgl. einer Familie von α-Räumen ist (kurz: beliebige Finalräume von α-Räumen) heissen <u>$\overline{\alpha}$-Räume</u>; die Klasse aller $\overline{\alpha}$-Räume werde mit $\overline{\alpha}$ bezeichnet.

Das angekündigte Resultat lässt sich nun so formulieren :

1.6 Satz : Ein l.k. Raum E ist genau dann ein minimal-α Raum, wenn er eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

a) E ist minimal-α_0 .

b) Jede fastabgeschlossene, injektive lineare Abbildung von einem α_1-Raum nach E ist stetig.

c) Jede fastabgeschlossene, bijektive lineare Abbildung von einem α_2-Raum nach E ist stetig.

d) E ist minimal-$\overline{\alpha}$.

Beweis : Ist E minimal-α , so schliesst man mit 1.3 b und einem bekannten Stetigkeitskriterium für Finaltopologien auf d) . Teil d) seinerseits zieht a) , b) und c) nach sich.

Sei jetzt c) vorausgesetzt. Wir zeigen, dass E minimal-α ist. Es sei also f eine fastabgeschlossene lineare Abbildung von einem α-Raum F nach $E = (E,t)$. Wie beim Beweis von 1.5 a wählen wir eine lineare Abbildung $r : E / \overline{\{0\}} \longrightarrow E$, so dass $p \circ r$ die Identität auf $E / \overline{\{0\}}$ ist, $p : E \longrightarrow E / \overline{\{0\}}$ kanonisch. Auf E betrachten wir jetzt die Finaltopologie s bzgl. $r \circ p \circ f : F \to E$. Sie ist separiert, da $(r \circ p \circ f)^{-1}(\{0\})$ als Kern der g-abgeschlossenen Abbildung $p \circ f : F \longrightarrow (E,t) / \overline{\{0\}}$ (vgl. 1.2 b) abgeschlossen ist. Schliesslich ist $id : (E,s) \longrightarrow (E,t)$ fastabgeschlossen: Denn nach 1.2 b ist $r \circ p \circ f : F \longrightarrow (E,t)$ fastabgeschlossen, so dass nach 1.2 e auf E eine l.k. Topologie $t_0 \leq t$ existiert, für welche $r \circ p \circ f$ stetig ist und deren Nullraum gleich $\overline{\{0\}}^{\,t}$ ist; aus der Fastabgeschlossenheit von $id : (E,t_0) \longrightarrow (E,t)$ (vgl. 1.2 e) und aus $s \geq t_0$ folgt schliesslich die Zwischenbehauptung (vgl. 1.3 c). Die Voraussetzung c) ergibt nun die Stetigkeit von $id : (E,s) \longrightarrow (E,t)$. Daher sind $p \circ id \circ (r \circ p \circ f) = p \circ f$ und $f : F \longrightarrow (E,t)$ stetig. Dies war zu zeigen.

Dass E minimal-α ist, wenn a) oder b) erfüllt ist, beweist man entweder durch einen ähnlichen Schluss wie oben oder man führe diese Fälle auf c) zurück.

Man beachte die Vereinfachungen, die sich beim Beweis für separiertes (E,t) ergeben; u. a. folgt die Separiertheit von s einfach aus $s \geq t_0$. q. e. d.

Korollar : Für $\alpha = \overline{\alpha}$ ist ein separierter l.k. Raum E genau dann minimal-α , wenn jede bijektive, g-abgeschlossene lineare Abbildung von einem separierten α-Raum nach E stetig ist.

Als nächstes charakterisieren wir stark minimal-α Räume mittels des Satzes von der offenen Abbildung.

1.7 Satz : Ein l.k. Raum E ist genau dann stark minimal-α , wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

a) E ist stark minimal-$\overline{\alpha}$.

b) Jede surjektive, lineare Abbildung von einem linearen Teilraum L von E auf einen α_1-Raum F ist offen, falls ihr Graph in $E \times F$ abgeschlossen ist.

c) Jede surjektive, lineare g-abgeschlossene Abbildung von E auf einen α_2-Raum ist offen.

Beweis : Zu Teil a) verweisen wir auf Teil d) von 1.6 und auf die Definition 1.4 b .

Zu c) : Ist E stark minimal-α , dann betrachte man zu surjektiver, linearer Abbildung $f : E \to F$ die inverse Abbildung der zu f gehörigen Bijektion $E / \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow F$. - Ist umgekehrt c) gegeben, dann zeigt man sofort, dass jeder separierte Quotient von E die Bedingung 1.6 c erfüllt. Wegen 1.6 und 1.5 b ist damit alles bewiesen.

Zu b) : Beim Beweis von b) aus stark minimal-α ist zu beachten, dass die zu $f : L \to F$ gehörige Injektion $L / \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow F$ einen in $(E / \mathrm{Ker}(f)) \times F$ abgeschlossenen Graphen hat, wenn der Graph von f in $E \times F$ abgeschlossen ist. - Ist b) gegeben, dann ist nach 1.6 und 1.5 b für jeden separierten Quotienten von E die Bedingung 1.6 b nachzuweisen. Sei also G ein α_1-Raum, E / Q separiert und $f : G \longrightarrow E / Q$ linear, g-abgeschlossen und injektiv. Wir definieren $L := q^{-1}(f(G))$, $q : E \longrightarrow E / Q$ kanonisch, und betrachten die in naheliegender Weise gegebene lineare, surjektive Abbildung $g : L \to f(G) \to G$. Man rechnet sofort nach, dass der Graph von g in $E \times G$ abgeschlossen ist. Wegen c) ist g offen. Die mittels q definier-

te Abbildung $L \to f(G)$ ist surjektiv und stetig, so dass schliesslich $f(G) \to G$ offen ist. Dies ist aber äquivalent zur Stetigkeit von $f : G \to E / Q$.

q. e. d.

Korollar 1 : Minimal-α Räume werden durch b) und c) charakterisiert, wenn man zusätzlich Injektivität der Abbildungen fordert.

Korollar 2 : Jede bijektive (bzw. surjektive) stetige lineare Abbildung von einem minimal-α (bzw. stark minimal-α) Raum in einen separierten α-Raum ist offen.

Die in Korollar 2 ausgesprochene Eigenschaft ist i.a. nicht charakteristisch für (stark) minimal-α Räume. Dies ist für die Klasse α aller tonnelierten Räume von L.J. SULLEY gezeigt worden [35; §2].

Korollar 3 : Ein separierter tonnelierter Raum ist genau dann minimal-tonneliert (bzw. stark ~), wenn er B_r- (bzw. B-)vollständig ist (vgl. [1; Einleitung und Fussnote 1 auf S. 210]).

Beweis : Ein B_r-vollständiger Raum ist immer minimal-tonneliert nach [32; (4.9)] und 1.4 a . Desgleichen ist ein B-vollständiger Raum stark minimal-tonneliert ([32; (4.10)] und 1.7).

Sei umgekehrt E separiert, tonneliert und (stark) minimal-tonneliert. Dann ist nach [32; (3.3),1° und Definition 2, S. 50] (bzw. [32; (4.1),1° und Definition 5, S. 54]) zu zeigen, dass jede stetige, fastoffene bijektive (bzw. surjektive) lineare Abbildung f von E in einen separierten l.k. Raum F offen ist. Nun ist eine solche Abbildung f g-abgeschlossen und ihr Bild $f(E) = F$ ist tonneliert, da man leicht zeigt, dass jede Tonne von F Nullumgebung ist. Die Offenheit von f folgt jetzt aus 1.7 bzw. aus Korollar 1.

q. e. d.

Die Graphensätze über stetige bzw. offene Abbildungen lassen

sich bei Verwendung von Relationen wie folgt zusammenfassen. Zur Terminologie sei auf [29; theorem 2] und [28; (2.2)] verwiesen.

Korollar 4 : Ist f eine fastabgeschlossene, lineare Relation von einem α-Raum F (f ist also auf ganz F definiert) in einen stark minimal-α Raum E, dann ist f stetig.

Beweis : Man kann den Beweis von [29; theorem 2] übernehmen, falls man die Fastabgeschlossenheit von $p \circ f$, $p : E \longrightarrow E / f(0)$ kanonisch, nachweist: Dazu verifiziere man zunächst die elementaren Beziehungen

$$\bigcap_U p(\overline{f(U)}) \subset p(\bigcap_U (\overline{f(U)} + p^{-1}(0))) \subset p(\bigcap_U \overline{f(U+U)}).$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung der Fastabgeschlossenheit der Relation f :

$$\bigcap_U \overline{pf(U)} = \bigcap_U p(\overline{f(U) + f(0)}) = \bigcap_U p(\overline{f(U)}) = p(\bigcap_U \overline{f(U)}) =$$

$$= p(\overline{f(0)}) = \overline{pf(0)} ,$$

was zu zeigen ist (Definition 1.1).

q. e. d.

Die nun folgende Kennzeichnung eines minimal-α Raums durch eine Minimalitätsforderung an die Topologie von E stammt im separierten Fall von KŌMURA [21; 3.1] . Wir erinnern an folgende Definition [21; 3.1] :

Bei gegebener Klasse α von l.k. Räumen definieren wir zu jedem l.k. Raum (E,t) die zu t assoziierte $\overline{\alpha}$-Topologie t^a als das l.k. Infimum der Menge $\{ s \mid (E,s) \in \overline{\alpha} \text{ und } s \geq t \}$.

Wir benötigen die folgenden Eigenschaften von t^a :

1° t^a ist die gröbste aller $\overline{\alpha}$-Topologien auf E , die feiner als t sind. Insbesondere gilt $t^a \geq t$.

2° $t^a = t$ genau dann, wenn $t \in \overline{\alpha}$. Speziell gilt $(t^a)^a = t^a$.

3° Ist $f : (E,s) \longrightarrow (F,t)$ linear und stetig, so ist auch $f : (E,s^a) \longrightarrow (F,t^a)$ stetig.

Zum Beweis der letzten Aussage betrachte man die l.k. Finaltopologie auf F bzgl. (E,s^a) und f. Sie ist eine $\overline{\alpha}$-Topologie, die feiner als t ist. Folglich ist sie feiner als t^a, was zu zeigen war (vgl. [11; (1.4)]).

1.8 Satz : Ein l.k. Raum (E,t) ist genau dann minimal-α, wenn für jede l.k. Topologie s auf E mit $s \leq t$ und $\overline{\{0\}}^s = \overline{\{0\}}^t$ gilt: $s^a = t^a$.

Beweis : (E,t) sei minimal-α und s wie im Satz gegeben. Die Abbildung $id : (E,s^a) \longrightarrow (E,t)$ ist fastabgeschlossen; denn sie ist Produkt der stetigen Abbildung $id : (E,s^a) \longrightarrow (E,s)$ mit der fastabgeschlossenen Abbildung $id : (E,s) \longrightarrow (E,t)$ (1.3 b und 1.3 c). Also gilt $s^a \geq t$ oder äquivalent dazu $s^a \geq t^a$; wegen $s \leq t$ folgt schliesslich $s^a = t^a$.

Umgekehrt sei f eine lineare, fastabgeschlossene Abbildung eines α-Raums F nach (E,t). Die l.k. Finaltopologie s auf E bzgl. der Abbildungen $f : F \to E$ und $id : (E,t) \longrightarrow E$ ist gröber als t und hat nach 1.2 f den gleichen Nullraum wie t. Nach Voraussetzung gilt $s^a = t^a$. Aus der Stetigkeit von $f : F \longrightarrow (E,s)$ folgt nach der obigen Bemerkung 3° die Stetigkeit von $f : F \longrightarrow (E,s^a)$. Wegen $s^a = t^a \geq t$ ist auch $f : F \longrightarrow (E,t)$ stetig, was zu zeigen war.

q. e. d.

Korollar : Ein separierter α-Raum (E,t) ist genau dann minimal-α, wenn t minimal ist in der durch Inklusion geordneten Menge aller separierten $\overline{\alpha}$-Topologien auf E.

In diesem Korollar hat der Name "minimal-α" seinen Ursprung.

1.9 Beispiele :

a) Minimal-lokalkonvexe Räume : Für die Klasse α aller l.k. Räume besagt 1.8 : Ein separierter l.k. Raum ist genau dann minimal-l.k., wenn es auf ihm keine echt gröbere separierte l.k. Topologie gibt. In der Bourbaki-Terminologie heisst so ein Raum "von minimalem Typ" [8; II, §6, exercise 13] . Nach Teil a) dieser Übungsaufgabe und nach [8; II, §6, n° 7, prop. 9] sind dies genau die schwach vollständigen Räume, welche (bis auf Isomorphie) die Produkte $\mathbb{K}^I$, I beliebige Menge, sind. Es gilt:

Ein minimal-l.k. Raum E ist stark minimal-l.k. .

Beweis : Ohne Einschränkung sei E separiert (1.5 a). Aus den obigen Bemerkungen und [8; II, §6, n° 7, prop. 10 ii] folgt, dass jeder abgeschlossene Teilraum Q von E einen topologischen Komplementärraum L besitzt. Daher ist jeder separierte Quotient E/Q topologisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum L von E . Wegen 1.5 c folgt die Behauptung.

q. e. d.

Minimal-l.k. Räume kann man auch durch (die Klasse ε_1 aller) Räume mit Mackeytopologie oder durch (die Klasse ε_2 aller) Räume mit schwacher Topologie kennzeichnen:

Ein l.k. Raum E ist genau dann minimal-l.k., wenn er minimal-ε_i ist, $i = 1, 2$.

Beweis : Ist E minimal-l.k., so ist E trivialerweise minimal-ε_i , $i=1,2$.

Ist umgekehrt (E,t) minimal-ε_2 , so ist die Stetigkeit jeder fastabgeschlossenen Abbildung $f : F \longrightarrow (E,t)$ zu zeigen (F beliebig l.k.). Für eine solche Abbildung ist nun nach 1.3 d $f : (F,\sigma(F,F')) \longrightarrow (E,t)$ fastabgeschlossen und somit nach Voraussetzung stetig. Erst recht ist dann $f : F \rightarrow (E,t)$ stetig.

Sei schliesslich (E,t) minimal-ε_1 . Da ein minimal-l.k. Raum tonneliert ist, genügt es zu zeigen, dass $(E,\sigma(t))$ (vgl. Fuss-

note auf S.9) minimal-l.k. ist. Ist $f : F \longrightarrow (E,\sigma(t))$ fastabgeschlossen, F beliebig l.k., so folgt nach 1.3 d und Voraussetzung die Stetigkeit von $f : (F,\tau(F,F')) \longrightarrow (E,t)$. Wegen [19; 21.1] ist dann auch $f : F \longrightarrow (E, (t))$ stetig, was zu zeigen war.

q. e. d.

Schliesslich noch eine Variante, die 1.8 nachempfunden ist:

Ein l.k. Raum (E,t) ist genau dann minimal-l.k., wenn für jede l.k. Topologie s auf E mit $s \leq t$ und $\overline{\{0\}}^{s} = \overline{\{0\}}^{t}$ gilt: $\tau(s) = \tau(t)$ (bzw. $\sigma(s) = \sigma(t)$).

Beweis : Man führe die Behauptung auf 1.8 (mit der Klasse α aller l.k. Räume) zurück. Dabei ist zu beachten, dass (E,t) minimal-l.k. ist, wenn es $(E,\sigma(t))$ ist (vgl. letzten Beweis).

q. e. d.

b) Minimal-tonnelierte Räume : Die hier (durch die Klasse α aller tonnelierten Räume) definierten minimal-tonnelierten Räume sind (im separierten Fall) bei ADASCH [1] die infra-s-Räume, bei VALDIVIA in [37] die S-Räume und in [40] die Γ_r-Räume. Die separierten, stark minimal-tonnelierten Räume heissen in [1] s-Räume und in [40] Γ-Räume.

c) Minimal-bornologische Räume : Da jeder bornologische Raum Finalraum von halbnormierten Räumen ist [19; 19.7], genügt es, für minimal-bornologische Räume fastabgeschlossene Abbildungen mit normiertem (bzw. metrisierbarem) Definitionsbereich zu "testen" (1.6 a und 1.6 d).

Wegen [19; 19.3 i] lässt sich 1.8 hier auch so aussprechen:

Ein l.k. Raum (E,t) ist genau dann minimal-bornologisch, wenn jede l.k. Topologie s auf E mit $s \leq t$ und

$\overline{\{0\}}^{s} = \overline{\{0\}}^{t}$ die gleichen beschränkten Mengen wie t hat.

In 5.6 werden wir zeigen, dass auf jedem metrisierbaren, unendlich-dimensionalen l.k. Raum, der nicht zu $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ isomorph ist, eine echt gröbere l.k. Metrik existiert. Ein solcher Raum ist also nicht minimal-bornologisch. Die Existenz einer echt gröberen Metrik ist auch notwendig dafür, dass ein metrisierbarer l.k. Raum nicht minimal-bornologisch ist; denn die im zweiten Teil des Beweises von 1.8 vorkommende Topologie s ist für metrisierbares F und E auch metrisierbar.

Für normierte Räume erhalten wir nun folgendes bekannte Ergebnis (vgl. [8; II, §4, exercise 5 a] und [19; §11, problem I], deren Lösungshinweise sich jedoch als unbrauchbar (für mich) bzw. als unzutreffend erweisen) :

> Jeder unendlich-dimensionale normierte Raum (E,t) besitzt eine echt gröbere Norm.

Beweis : (E,t) ist metrisierbar und nicht zu $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ isomorph. Nach dem oben erwähnten Resultat 5.6 existiert auf (E,t) eine echt gröbere metrisierbare l.k. Topologie s . Zu s gibt es eine Familie $(F_\kappa)_{\kappa\in I}$ von normierten Räumen und linearen Abbildungen $f_\kappa : F_\kappa \to E$, so dass t die l.k. Finaltopologie bzgl. dieser Familie ist (s ist separiert und bornologisch). Da $\mathrm{id} : (E,s) \longrightarrow (E,t)$ g-abgeschlossen und unstetig ist, existiert ein $\mu \in I$, so dass $f_\mu : F_\mu \longrightarrow (E,t)$ g-abgeschlossen (1.3 b) und unstetig ist. Die l.k. Finaltopologie auf E bzgl. $f_\mu : F_\mu \to E$ und $\mathrm{id} : (E,t) \longrightarrow E$ leistet nun das Gewünschte.

q. e. d.

d) Abzählbar-dimensionale Räume : Sei E ein abzählbar-dimensionaler l.k. Raum. Als erstes erwähnen wir, dass E stark minimal-tonneliert ist; dies folgt unmittelbar aus [9; III, §1 , exercise 4], das besagt, dass es auf einem abzählbar-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$ nur eine separierte, tonnelierte Topologie gibt.

Für separiertes E hat VALDIVIA dies dahingehend verschärft, dass E ein U-Raum ist [37; theorem 2]. U-Raum bedeutet aber nichts anderes als schwach t-polar [29]. Aus der Definition [29; 6. 55] folgt sofort, dass ein Raum genau dann t-polar ist, wenn jeder separierte Quotient schwach t-polar ist. In unserem Fall impliziert dies:

Jeder abzählbar-dimensionale, separierte l.k. Raum ist t-polar.

(Dies folgt allerdings unmittelbar aus der Metrisierbarkeit des schwachen Duals. Die Bedingung für t-polar lautet nämlich: Jeder quasiabgeschlossene lineare Teilraum des schwachen Duals ist abgeschlossen.)

Zum Schluss zeigen wir, dass ein abzählbar-dimensionaler l.k. Raum nur dann minimal-bornologisch ist, wenn sein assoziierter separierter Raum endliche Dimension besitzt. Dies folgt aus:

Auf jedem separierten l.k. Raum E abzählbar-unendlicher Dimension existiert eine echt gröbere l.k. Metrik.

Beweis: Nach [9; III, §1 , exercise 4 a] existiert eine topologisch freie Hamelbasis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von E. Dies impliziert die Stetigkeit der injektiven Abbildung $f : E \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,

$$a = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n a_n\Big) \longmapsto (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ;$$

denn die Linearformen $pr_n \circ f$ haben einen abgeschlossenen Kern. Vermöge f erhalten wir also eine gröbere metrisierbare l.k. Topologie s auf E. Sollte s nicht echt gröber sein, so wende man das Verfahren auf eine separierte l.k. Topologie auf E an, die echt gröber als s ist. (Eine solche existiert, da s als unvollständige Topologie nicht minimal-l.k. ist.)

q. e. d.

§2 DUALE CHARAKTERISIERUNG

Wir wollen in diesem Paragraphen die Bedingung von 1.8 in den Dualraum "übersetzen". Im Falle eines separierten minimal-tonnelierten Raums (E,t) geschieht das so:

1° Jede separierte l.k. Topologie s auf E, die gröber als t ist, gibt einen dichten, linearen Teilraum H ($:= (E,s)'$) von $(E',\sigma(E',E))$, und umgekehrt ($s := \sigma(E,H)$).

2° Die assoziierte tonnelierte Topologie einer l.k. Topologie s auf E wird gegeben durch $\tau(E, \overline{(E,s)'}^{\,\sigma})$; $\overline{(E,s)'}^{\,\sigma}$ ist dabei die schwach-quasivollständige, lineare Hülle von $(E,s)'$, gebildet in $(E^*,\sigma(E^*,E))$ - vgl. [1; §2].

Mit Hilfe dieses "Wörterbuchs" ergibt 1.8 sofort:

2.1 Satz : Ein separierter l.k. Raum E ist genau dann minimal-tonneliert, wenn für jeden schwach-dichten linearen Teilraum H von E' gilt: $\overline{H}^{\,\sigma} = \overline{E'}^{\,\sigma}$.

Aus dieser Formulierung ergeben sich ohne Mühe die Charakterisierungen von ADASCH [1] und VALDIVIA [37], [40]; denn es gilt:

2.2 Lemma : Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und E' ein linearer Teilraum von E^* . Dann sind äquivalent:

a) Für jeden schwach-dichten linearen Teilraum H von E' gilt $\overline{H}^{\,\sigma} = \overline{E'}^{\,\sigma}$; vgl. 2.1 .

b) Für jeden schwach-dichten linearen Teilraum H von E' gilt $\overline{H}^{\,\sigma} \cap E' = E'$; vgl. [1; §2].

c) Für jeden schwach-dichten linearen Teilraum G von $\overline{E'}^{\,\sigma}$, so dass $G \cap E'$ in E' dicht ist, und der in $\overline{E'}^{\,\sigma}$ quasiabgeschlossen ist, gilt $G = \overline{E'}^{\,\sigma}$; vgl. [37; S. 549].

d) Für jeden schwach-quasivollständigen linearen Teilraum G von

E^* , so dass $G \cap E'$ in E' dicht ist, gilt $E' \subset G$; vgl. [40; Definition 1].

Beweis : a)$\Longleftrightarrow$b) : Wegen $H \subset E'$ ist $\overline{H} = \overline{E'}$ zu $E' \subset \overline{H}$ äquivalent. $E' \subset \overline{H}$ bedeutet aber $\overline{H} \cap E' = E'$.
c)$\Longleftrightarrow$d) : Da $\overline{E'}$ schwach-quasivollständig ist, und da aus $G \cap E'$ dicht in E' folgt, dass G dicht in $\overline{E'}$ ist, lautet c) : Für jeden schwach-quasivollständigen linearen Teilraum $G \subset \overline{E'}$, so dass $G \cap E'$ dicht in E' ist, gilt $G = \overline{E'}$. Damit ist die Richtung von d) nach c) trivial. Für die umgekehrte Implikation betrachte man $G \cap \overline{E'}$.
a)$\Longleftrightarrow$d) : Ist H gegeben, so wende man d) auf $G := \overline{H}$ an. In der anderen Richtung erhält man für $H := G \cap E'$, dass gilt $E' \subset \overline{H} \subset \overline{G} = G$, was zu zeigen ist.

q. e. d.

Wir kommen jetzt zum allgemeinen Fall. Dazu eine Definition:

2.3 Definition : Sei α eine Klasse von Mackeyräumen, E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und H ein linearer Teilraum des algebraischen Duals E^* . Dann sei $\overline{H} := (E,\tau(E,H)^{\alpha})'$.

2.4 Lemma : Sei (E,t) l.k., t die l.k. Finaltopologie auf E bzgl. einer Familie l.k. Räume $((E_\mu,t_\mu))_{\mu\in I}$ mit linearen Abbildungen $f_\mu : E_\mu \to E$, $\mu\in I$.

Dann ist die Mackeytopologie $\tau(t)$ gleich der l.k. Finaltopologie auf E bzgl. $((E_\mu,\tau(t_\mu)))_{\mu\in I}$ und der Abbildungen f_μ , $\mu\in I$.

Beweis (Dr. J. ELSTRODT) : Da stetige Abbildungen Mackey-stetig sind (vgl. Beweis von 1.5 g), ist $\tau(t)$ eine l.k. Topologie s auf E , für welche die Abbildungen $f_\mu : (E_\mu,\tau(t_\mu)) \longrightarrow (E,s)$ stetig sind. Sei nun s irgendeine l.k. Topologie mit dieser Eigenschaft. Die Abbildungen f_μ sind dann schwach-stetig [19; 21.1], woraus die Stetigkeit von $f_\mu : (E_\mu,t_\mu) \longrightarrow (E,\sigma(s))$, $\mu\in I$ folgt. Das bedeutet, dass die schwache Topologie von s gröber

als t ist. Damit ist aber s gröber als $\tau(t)$. Es ist also gezeigt, dass $\tau(t)$ die feinste l.k. Topologie auf E ist, für welche alle $f_\mu : (E_\mu, \tau(t_\mu)) \longrightarrow E$ stetig sind. q. e. d.

Für separierte Räume steht ein wesentlich anderer Beweis bei [24; 22.7(8)].

2.5 Lemma : Die Vorausstzungen seien wie in 2.3 . H sei ein linearer Teilraum von E^* und s sei eine l.k. Topologie auf E .

a) $s^a = \tau(E,(E,s)')^a = \tau(E, \overline{(E,s)'}^{\,'})$.

b) $\overline{H}'$ ist der kleinste lineare Teilraum R von E^* , der H umfasst und für den $\tau(E,R)$ eine $\overline{\alpha}$-Topologie auf E ist. Insbesondere gilt

$$\overline{H} = \cap \{ R \mid R \subset E^* \text{ linearer Teilraum, } R \supset H,\ \tau(E,R) \in \overline{\alpha} \} .$$

Beweis : a) Wegen 2.4 gilt $s^a = \tau(E,(E,s^a)') \geq \tau(E,(E,s)') \geq s$. Durch Bildung der assoziierten $\overline{\alpha}$-Topologie erhält man die Behauptung.

b) Nach a) ist $\tau(E,\overline{H}') = \tau(E,H)^a$, also eine $\overline{\alpha}$-Topologie. $\overline{H} \supset H$ folgt aus $\tau(E,H)^a \geq \tau(E,H)$. Ferner gilt für ein R mit den angegebenen Eigenschaften $\tau(E,R) \geq \tau(E,H)$ und somit $\tau(E,R) \geq \tau(E,H)^a$. Daher gilt $R \supset \overline{H}$.

q. e. d.

2.6 Satz : Ist $\mathfrak{A}$ eine Klasse von Mackey-Räumen, so ist ein l.k. Raum E genau dann minimal-α , wenn für jeden $\sigma(E',E)$-dichten linearen Teilraum $H \subset E'$ gilt $\overline{H} = \overline{E'}$.

Beweis : 1° Anwendung des Bipolaren-Satzes auf die Gleichung

$$\overline{\{0\}}^{s} = \overline{\{0\}}^{\sigma(E,(E,s)')} = ((E,s)')^{\circ}$$

- wobei s l.k. ist - ergibt für l.k. Topologien s, t auf E mit $s \leq t$:

$(E,s)'$ ist genau dann schwach-dicht in $(E,t)'$, wenn $\overline{\{0\}}^{s} = \overline{\{0\}}^{t}$.

2° Sei $E = (E,t)$ minimal-α und $H \subset E'$ ein dichter linearer Teilraum. Die Topologie $\sigma(E,H)$ ist gröber als t und besitzt nach 1° den gleichen Nullraum wie t . Wegen 1.8 und 2.5

gilt $\tau(E, \overline{E'}) = t^a = \sigma(E,H)^a = \tau(E, \overline{H})$. Hieraus folgt $\overline{E'} = \overline{H}$.

3° Dass umgekehrt $E = (E,t)$ minimal-α ist, zeigt man durch Nachweis von 1.8 : Dazu sei s eine l.k. Topologie auf E mit $s \leq t$ und $\overline{\{0\}}^s = \overline{\{0\}}^t$. Nach Voraussetzung gilt $\overline{(E,s)'} = \overline{(E,t)'}$, also wegen 2.5 a $s^a = t^a$.

q. e. d.

2.7 Beispiele : Wir wollen nun für einige Klassen α die Hülle $\overline{H}$ von H näher charakterisieren. Die jeweiligen Ergebnisse werden dann auf 2.6 angewandt.

a) Wir behandeln zuerst die Fälle α = tonneliert und α = quasitonneliert.

Man weiss, dass ein l.k. Raum E genau dann (quasi)tonneliert ist, wenn er die Mackey-Topologie trägt und wenn jede $\sigma(E',E)$-(bzw. $\beta(E',E)$-)beschränkte, $\sigma(E',E)$-abgeschlossene Teilmenge von E' $\sigma(E',E)$-vollständig ist (für tonneliert siehe [24; 23.6(4)]; der quasitonnelierte Fall geht analog).

Damit ist nach 2.5 b $\overline{H}$ der kleinste lineare Teilraum R von E^* , der H umfasst, und in dem jede $\sigma(R,E)$-(bzw. $\beta(R,E)$-) beschränkte, $\sigma(R,E)$-abgeschlossene Menge $\sigma(R,E)$-vollständig ist.

Der Satz 2.6 lautet nun:

> Ein l.k. Raum E ist genau dann minimal-tonneliert (bzw. minimal-quasitonneliert), wenn für jeden $\sigma(E',E)$-dichten linearen Teilraum H von E' gilt: Jeder lineare Teilraum R von E^* , in dem jede $\sigma(R,E)$-(bzw. $\beta(R,E)$-)beschränkte Menge relativ $\sigma(R,E)$-kompakt ist, und der H umfasst, enthält auch E' .

Für α = tonneliert ist $\overline{H}$ sogar die kleinste schwach-quasivollständige Menge aus $(E^*, \sigma(E^*,E))$, die H enthält. Denn diese Menge erhält man auch durch die bekannte transfinite Konstruktion

$$H_{\mu+1} := \bigcup \{ \overline{B}^{\sigma(E^*,E)} \mid B \text{ beschränkt}, \ B \subset H_\mu \}$$

$H_\mu := \bigcup \{ H_\nu \mid \nu < \mu \}$ für Limeszahlen μ .

Hieraus ist ersichtlich, dass alle H_μ , insbesondere die schwach-quasivollständige Hülle von H , lineare Teilräume von E^* sind.

Für α = quasitonneliert erhält man eine analoge Konstruktion von $\overline{H}$.

b) Wir kommen jetzt zu α = bornologisch.

Ein l.k. Raum ist bekanntlich genau dann bornologisch, wenn er die Mackey-Topologie trägt und wenn jede beschränkte Linearform stetig ist. Man folgert damit ohne Mühe aus 2.5 b

$$\overline{H} = \{ f \in E^* \mid f \text{ ist } \sigma(E,H)\text{-beschränkt} \} ,$$

oder auch wegen [24; 28.3(3)]

$$\overline{H} = \{ f \in E^* \mid f \text{ ist beschränkt auf allen } \sigma(E,H)\text{-lokalen Nullfolgen} \} .$$

Eine weitere Charakterisierung von $\overline{H}$ ergibt sich aus [24; 28.5(4)]. Sie gilt zunächst nur für $\sigma(E^*,E)$-dichtes H , jedoch zeigt man durch eine Standardreduzierung die Gültigkeit für beliebige lineare Teilräume H von E^* .

$\overline{H}$ ist die vollständige Hülle von H , H versehen mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf allen lokalen Nullfolgen von $(E,\sigma(E,H))$.

Der Satz 2.6 besagt nun:

Ein l.k. Raum E ist genau dann minimal-bornologisch, wenn für jeden $\sigma(E',E)$-dichten linearen Teilraum H von E' gilt: E' ist enthalten in der "geschlossenen Hülle" $\overline{H}$ von H .

c) Sei α die Klasse der ultrabornologischen Räume.

Ultrabornologisch bedeute hier Finalraum von Banachräumen. Zur Bestimmung von $\overline{H}$ benötigen wir den Begriff der Banachnullfolge.

Eine Banachnullfolge in einem l.k. Raum E ist das Bild einer Nullfolge eines Banachraums F unter einer stetigen linearen Abbildung $F \to E$.

Hilfssatz : Sei (E,t) l.k. . Die Menge aller absolutkonvexen Mengen aus E ,die alle Banachnullfolgen von (E,t) absorbieren, ist eine Nullumgebungsbasis für die assoziierte ultrabornologische Topologie t^a .

Beweis : Zu jeder Banachnullfolge $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (E,t) wählen wir einen Banachraum F_y und eine stetige lineare Abbildung $f_y : F_y \longrightarrow (E,t)$, so dass y Bild einer Nullfolge in F_y ist. Bzgl. dieser Familie von Banachräumen und Abbildungen bilden wir die l.k. Finaltopologie s auf E .
Nun ist eine absolutkonvexe Menge $U \subset E$ genau dann eine s-Nullumgebung, wenn alle ihre Urbilder V_y in F_y Nullumgebungen sind. V_y ist aber nach [19; 22.1] genau dann eine Nullumgebung, wenn es alle Nullfolgen von F_y absorbiert. Die absolutkonvexen s-Nullumgebungen sind also die in der Behauptung angegebenen Mengen.
s ist selbstverständlich ultrabornologisch und feiner als t . Es bleibt zu zeigen, dass s gröber als jede ultrabornologische Topologie auf E ist, welche feiner als t ist. Sei r eine solche Topologie. Mit einem ähnlichen Schluss wie oben zeigt man, dass eine absolutkonvexe Menge $U \subset E$,die alle r-Banachnullfolgen absorbiert, eine r-Nullumgebung ist. Wegen $r \geq t$ folgt aus dem bisher Bewiesenen $r \geq s$. Da $\alpha = \overline{\alpha}$, gilt $s = t^a$ (vgl. S. 15).
q. e. d.

Zur Bestimmung der t^a-stetigen Linearformen gehe man wie beim Beweis des Hilfssatzes auf die definierenden Banachräume zurück und benutze, dass dort die stetigen Linearformen gleich den auf allen Nullfolgen beschränkten Linearformen sind. Auf diese Weise folgt für einen l.k. Raum (E,t) und für ein $H \subset E^*$, H linear:

$$(E,t^a)' = \{ f \in E^* \mid f \text{ ist auf allen t-Banachnullfolgen beschränkt } \} .$$

$$\overline{H}' = \{ f \in E^* \mid f \text{ beschränkt auf allen } \tau(E,H)\text{-Banachnullfolgen } \} .$$

Wir stellen jetzt $(E,t^a)'$ als vollständige Hülle von $(E,t)'$ dar. Sei (E,t) separiert und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine t-Banachnullfolge mit zugehörigem $f : F \longrightarrow (E,t)$ und Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F. Da in einem Banachraum jede Nullfolge eine lokale Nullfolge ist, existieren Zahlen $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to \infty$, so dass $\lambda_n x_n \to 0$. Aus Vollständigkeitsgründen ist dann $\overline{\Gamma\{ \lambda_n x_n \mid n\in\mathbb{N} \}}$ kompakt. Da f stetig ist und t separiert, gilt

$$f(\overline{\Gamma\{ \lambda_n x_n \mid n\in\mathbb{N} \}}) = \overline{f(\Gamma\{ \lambda_n x_n \})} = \overline{\Gamma\{ \lambda_n y_n \mid n\in\mathbb{N} \}} =: B .$$

B ist kompakt, und wegen $\lambda_n \to \infty$ ist (y_n) eine Nullfolge in dem kanonisch normierten Raum E_B.

Für jede t^a-stetige Linearform g auf E gilt dann, da $g\circ f$ stetig ist, dass $g\circ f(\overline{\Gamma\{ \lambda_n x_n \}}) = g(B)$ beschränkt ist, d.h. die Einschränkung von g auf den normierten Raum E_B ist stetig. Jetzt entnimmt man dem Beweis von [24; 28.5(4)], dass $g \mid \overline{\Gamma\{y_n\}}$ $\sigma(E,E')$-stetig ist.

Fasst man nun die Überlegungen zusammen, so erhält man mittels [19; 16.9] aus der obigen Beschreibung von $(E,t^a)'$ - den nicht separierten Fall führe man auf den separierten zurück :

> $(E,t^a)'$ (bzw. $\overline{H}$) ist die vollständige Hülle von $(E,t)'$ (bzw. von H) bzgl. der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf allen Banachnullfolgen von (E,t) (bzw. $\tau(E,H)$).

Für die minimal-ultrabornologischen Räume gilt daher nach 2.6 :

> Ein l.k. Raum (E,t) ist genau dann minimal-ultrabornologisch, wenn für jeden $\sigma(E',E)$-dichten Teilraum $H \subset E'$ gilt : Jede t-stetige Linearform auf E ist auf allen $\tau(E,H)$-Banachnullfolgen beschränkt.
>
> Eine äquivalente Forderung an H ist, dass E' enthalten sein soll in der vollständigen Hülle von H, H versehen mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf allen Banachnullfolgen von $(E,\tau(E,H))$.

d) Dieses Beispiel geht auf ROELCKE zurück. Wir betrachten die Klasse $\alpha = \{ E \mid E$ Mackeyraum, E besitzt eine schwach-kompakte Tonne $\}$.

Zur Beschreibung der $\overline{\alpha}$-Räume wird folgendes Lemma von Herrn Dr. H. PFISTER benötigt. Dabei erinnern wir an den Begriff der assoziierten linearen Topologie t_o zu einem l.k. Raum (E,t) : Als Nullumgebungsbasis für t_o nimmt man alle Mengen der Form $\cap \{ \lambda U \mid \lambda > 0 \}$, wobei U eine t-Nullumgebungsbasis von absolutkonvexen Mengen durchläuft.

t_o ist immer feiner als t und besitzt eine Nullumgebungsbasis von t-abgeschlossenen Mengen. Nach [24; 18.4(4)] (der Beweis überträgt sich) impliziert daher die Vollständigkeit von t die von t_o . Ferner ist, wie unmittelbar aus den Definitionen folgt, die Bildung der Relativtopologie vertauschbar mit der Bildung der assoziierten linearen Topologie, d.h. $t_o | M = (t|M)_o$ für jeden linearen Teilraum M von E .

Lemma (PFISTER): Sei (E,t) l.k. und separiert. Äquivalent sind:

a) (E,t) ist topologisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum eines Produkts von normierten Räumen.

b) (E,t_o) ist vollständig.

Beweis : a) $\Longrightarrow$ b) Sei $(E_\mu)_{\mu \in I}$ eine Familie normierter Räume, s die Produkttopologie des Produkts dieser Räume. Dann ist s_o vollständig: Denn die zu s_o gehörige uniforme Struktur ist offenbar das Produkt der diskreten uniformen Strukturen auf jedem Faktor E_μ . Ist nun (E,t) abgeschlossener linearer Teilraum eines solchen Produkts, so ist E auch s_o-abgeschlossen und daher bzgl. $s_o|E = (s|E)_o = t_o$ vollständig.

b) $\Longrightarrow$ a) Man bette (E,t) in üblicher Weise ein in ein Produkt von normierten Räumen (E_U, p_U) , U durchläuft eine t-Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen [24; 18.3(7)]. E ist sogar enthalten im projektiven Limes Y des kanonischen projektiven Systems $((E_U, p_U), g_{U,V})$, $g_{U,V} : E_V \to E_U$ kanonisch. Wir zeigen, dass die kanonische Abbildung $w : E \to Y$ surjektiv ist, was die Behauptung gibt.

Sei also $y \in Y$, d.h. $y = (y_U) \in \prod E_U$, so dass für alle U, V mit $V \subset U$ gilt $g_{U,V}(y_V) = y_U$. Jetzt wähle man für jedes U ein $x_U \in E$ mit $w_U(x_U) = y_U$, $w_U : E \to E_U$ kanonisch. Dann gilt

$$w_U(x_U) = y_U = g_{U,V}(y_V) = g_{U,V} \circ w_V(x_V) = w_U(x_V),$$

also $x_U + N_U = x_V + N_U \supset x_V + N_V$ $\quad (N_U := \cap \{ \lambda U \mid \lambda > 0 \})$.

Hieraus folgt, dass $\{ x_U + N_U \mid U \}$ eine t_o-Cauchyfilterbasis ist. Nach Voraussetzung konvergiert der entsprechende Filter, auch bzgl. t, so dass $\emptyset \neq \cap \{ \overline{x_U + N_U}^{\,t} \mid U \} = \cap \{ x_U + N_U \mid U \}$.

Für ein Element x aus diesem Durchschnitt gilt dann für alle U

$$w_U(x) = w_U(x_U) = y_U \quad , \quad \text{d.h.} \quad w(x) = y \quad , \quad \text{was zu zeigen war.}$$

q. e. d.

Jetzt sind wir in der Lage, die $\bar{\alpha}$-Räume zu beschreiben.

Ein l.k. Raum E ist genau dann aus $\bar{\alpha}$, wenn er die Mackeytopologie trägt, und wenn $(E', \tau(E',E)_o)$ vollständig ist.

Beweis : 1^o Sei E ein $\bar{\alpha}$-Raum. Dann gibt es α-Räume E_μ, lineare Abbildungen $f_\mu : E_\mu \to E$, so dass E Finalraum der Räume E_μ ist. E ist also nach 2.4 ein Mackeyraum.

Da $\mathbb{K}$ ein α-Raum ist, kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $\sum_\mu f_\mu(E_\mu) = E$ ist. Somit ist E topologisch isomorph zu einem Quotienten $(\bigoplus_\mu E_\mu)/H$, und E' ist algebraisch isomorph zur Polaren H^o in $\prod_\mu E_\mu'$.

Nun existiert in E_μ genau dann eine schwach-kompakte Tonne, wenn das Mackeydual von E_μ eine beschränkte Nullumgebung besitzt, d.h. wenn $(E_\mu', \tau(E_\mu', E))$ halbnormiert ist. Folglich ist H^o ein abgeschlossener Teilraum eines Produktes von normierten Räumen; nach dem Lemma ist daher $(\tau(\Pi)|H^o)_o$ vollständig, wobei

$$\tau(\Pi) := \tau\Big(\prod_\mu E_\mu', \bigoplus_\mu E_\mu\Big) = \prod_\mu \tau(E_\mu', E_\mu) .$$

Wegen $\sigma(H^o,E) = \sigma(\Pi)|H^o \leq \tau(\Pi)|H^o \leq \tau(H^o,E)$ folgt, dass $\tau(H^o,E)_o$ feiner ist als $(\tau(\Pi)|H^o)_o$ und eine Nullumgebungsbasis

aus $(\tau(\Pi)|H^\circ)_\circ$-abgeschlossenen Mengen besitzt. Daher ist $\tau(H^\circ,E)_\circ$ vollständig, was die Behauptung darstellt.

2° Ist umgekehrt E ein Mackey-Raum, und $(E',\tau(E',E)_\circ)$ vollständig, dann ist nach dem Lemma $G := (E',\tau(E',E))$ topologisch isomorph zu einem abgeschlossenen linearen Teilraum eines Produktes $\prod_\mu F_\mu$ normierter Räume F_μ. Das Mackeydual G' von G ist nun nach [24; 22.2(4) und 22.5(4)] topologisch isomorph zu einem Quotienten von $\bigoplus_\mu (F_\mu',\tau(F_\mu',F_\mu))$. Somit ist G' ein $\overline{\alpha}$-Raum, und wegen $G' \cong (E,\tau(E,E'))/\overline{\{0\}}$ auch E.

q. e. d.

Die gerade bewiesene Charakterisierung der $\overline{\alpha}$-Räume legt die Vermutung nahe, dass für einen Vektorraum E über $\mathbb{K}$ und einen linearen Teilraum H von E^* gilt :

$\overline{H}$ ist die vollständige Hülle von $(H,\tau(H,E)_\circ)$.

Beweis : Sei F die vollständige Hülle von $(H,\tau(H,E))$, F wegen [24; 18.4(4)] als linearer Teilraum von E^* aufgefasst. Aus der Vollständigkeit von $\tau(F,E)$ folgt die von $\tau(F,E)_\circ$. Wegen

$$\tau(H,E)_\circ = (\tau(F,E)|H)_\circ = \tau(F,E)_\circ|H$$

ist $(H,\tau(H,E)_\circ)$ ein Teilraum des vollständigen Raums $(F,\tau(F,E)_\circ)$. Seine Vervollständigung G kann daher als die abgeschlossene Hülle von H in $(F,\tau(F,E)_\circ)$ aufgefasst werden.

Da H in $(G,\tau(F,E)|G)$ dicht liegt, folgt nach [19; 18.9(11)] $\tau(G,E) = \tau(F,E)|G$. Wegen $\tau(F,E)_\circ|G = (\tau(F,E)|G)_\circ$ erhält man die Vollständigkeit von $\tau(G,E)_\circ$. Nach 2.5 b und der obigen Charakterisierung von $\overline{\alpha}$-Räumen gilt daher $G \supset \overline{H}$.

Die umgekehrte Inklusion $G \subset \overline{H}$ ist auch richtig, weil $\overline{H}$ wegen $\tau(\overline{H},E)_\circ = (\tau(F,E)|\overline{H})_\circ = \tau(F,E)_\circ|\overline{H}$ und der obigen Charakterisierung von $\overline{\alpha}$-Räumen ein vollständiger, also abgeschlossener Teilraum von $(F,\tau(F,E)_\circ)$ ist, der H umfasst.

q. e. d.

Für minimal-$\overline{\alpha}$ Räume ergibt sich nun aus 2.6 :

Ein l.k. Raum E ist genau dann minimal-α, wenn für jeden $\sigma(E',E)$-dichten linearen Teilraum $H \subset E'$ gilt: E' ist enthalten in der vollständigen Hülle von $(H,\tau(H,E)_\circ)$.

Nachdem wir uns ausgiebig mit Beispielen zur dualen Charakterisierung von minimal-α Räumen beschäftigt haben, kommen wir zu guter Letzt zur Charakterisierung eines stark minimal-α Raums zu einer gegebenen Klasse α von Mackeyräumen.

Aus der Definition 1.4 und aus 2.6 folgt zunächst, dass ein l.k. Raum E genau dann stark minimal-α ist, wenn gilt:

(*) Für jeden linearen Teilraum Q von E und jeden $\sigma((E/Q)',E/Q)$-dichten Teilraum H von $(E/Q)'$ gilt $\overline{H}^{\tau} \supset (E/Q)'$.

Nun gibt es bekanntlich (für jedes Q) einen topologischen Isomorphismus φ von $((E/Q)^*, \sigma((E/Q)^*,E/Q))$ auf $(Q^\bullet, \sigma(E^*,E)|Q^\bullet)$ - $Q^\bullet$ Polare in E^* - ,bei dem $(E/Q)'$ auf Q° - Polare in E' - abgebildet wird [19; 17.14(ii)].
Wenn wir nun wüssten, dass

$$\overline{\varphi(H)}^{\tau} = \varphi(\overline{H}^{\tau})$$

gilt, dann folgte in ganz kanonischer Weise, dass (*) äquivalent ist zu

(**) Für jeden linearen Teilraum H von E' gilt $\overline{H}^{\tau} \supset \overline{H}^{\sigma(E',E)}$.

Dies ist die angestrebte Charakterisierung der stark minimal-α Räume (siehe 2.9), die für α = tonneliert mit der von ADASCH [1; §2] gegebenen übereinstimmt.

Wann gilt nun $\overline{\varphi(H)}^{\tau} = \varphi(\overline{H}^{\tau})$?
Bei tonnelierten Räumen sieht man die Gültigkeit mit Hilfe von 2.7 a , da $Q^\bullet$ ein schwach-vollständiger Oberraum von $\varphi(H)$ ist. Nimmt man dagegen die Klasse α aller l.k. Räume mit der feinsten l.k. Topologie, dann ist die Beziehung - von trivialen Fällen abgesehen - falsch.

Auf ein hinreichendes Kriterium stösst man bei Betrachtung der Definition 2.3 ; und zwar stellt man fest, dass die assoziierten separierten Räume von $(E,\tau(E,\varphi(H)))$ und $(E/Q,\tau(E/Q,H))$ isomorph sind. Falls jetzt die Bildung von assoziierter $\overline{\alpha}$-Topologie und assoziierter separierter Topologie vertauschbar sind, erhält man in bekannter Weise einen Isomorphismus von $\overline{H}^{\tau}$ auf $\overline{\varphi(H)}^{\tau}$

von dem nachzurechnen ist, dass er die Einschränkung von φ ist. Wir können dabei die Rechenarbeit reduzieren, indem wir Q ohne Einschränkung als abgeschlossen voraussetzen (vgl. 1.5 b); an der Äquivalenz zwischen (dem abgeschwächten) (*) und (**) ändert sich dadurch nichts.

Bevor wir an die Ausführung dieser Beweisidee gehen, überlegen wir uns noch, was die Verträglichkeit der Bildung der assoziierten $\overline{\alpha}$-Topologie mit der assoziierten separierten Topologie bedeutet.

2.8 Lemma : Sei α eine Klasse l.k. Räume. Äquivalent sind:

a) Jeder Vektorraum (über $\mathbb{K}$) mit der gröbsten Topologie ist ein $\overline{\alpha}$-Raum.

b) Ein l.k. Raum liegt genau dann in $\overline{\alpha}$, wenn sein assoziierter separierter Raum ein $\overline{\alpha}$-Raum ist.

c) Für jeden l.k. Raum (E,t) gilt: $\overline{\{0\}}^{t} = \overline{\{0\}}^{t^a}$ und $(t/\overline{\{0\}})^a = t^a/\overline{\{0\}}$.

Beweis : a)$\Longrightarrow$c) Die Inklusionsabbildung von $N := \overline{\{0\}}^{t}$ nach (E,t) bleibt stetig beim Übergang zu den assoziierten $\overline{\alpha}$-Topologien (vgl. Bem. 3° auf S.16), d.h. $(t|N)^a \geq t^a|N$. Also ist N nach Voraussetzung ein linearer Teilraum von (E,t^a) , der die gröbste Topologie trägt. Es folgt $N \subset \overline{\{0\}}^{t^a}$. Die andere Inklusion ist trivial.

Durch Wahl eines topologisch direkten Summanden von N erhalten wir eine stetige, lineare Abbildung $r : (E/N, t/N) \longrightarrow (E,t)$ mit $p \circ r = id_{E/N}$, $p : E \longrightarrow E/N$ kanonisch. Hieraus folgt wie zu Beginn des Beweises $(t/N)^a \geq t^a/N$, was der nichttriviale Teil der Behauptung (über die Topologien) ist.

c)$\Longrightarrow$b) Es genügt zu zeigen, dass ein l.k. Raum mit der gröbsten Topologie aus $\overline{\alpha}$ ist. Dies ist aber klar, da der Nullraum von t^a gleich dem von t ist, also der ganze Raum.

b)$\Longrightarrow$a) Es genügt zu zeigen, dass ein einelementiger l.k. Raum ein $\overline{\alpha}$-Raum ist. Da nun jeder l.k. Raum mit der feinsten l.k. Topologie in $\overline{\alpha}$ liegt (Finaltopologie bzgl. der leeren Familie !), erhält man das Gewünschte. q. e. d.

2.9 Satz : Es sei α eine Klasse von Mackeyräumen, für welche jeder Vektorraum über $\mathbb{K}$, versehen mit der gröbsten Topologie, in $\overline{\alpha}$ liegt. Dann ist ein l.k. Raum E genau dann stark minimal-α, wenn für jeden linearen Teilraum H von E' gilt $\overline{H}^{\sigma(E',E)} \subset \overline{H}$.

Beweis : Nach den Vorbemerkungen bleibt zu zeigen, dass für einen abgeschlossenen linearen Teilraum Q und einen in $(E/Q)'$ schwach-dichten linearen Teilraum H gilt: Der Dualraum von $(E/Q,\tau(E/Q,H)^a)$ wird mittels φ abgebildet auf den Dualraum von $(E,\tau(E,\varphi(H))^a)$; φ ist die Abbildung $(E/Q)^* \longrightarrow Q^\bullet$, $g \mapsto g\circ q$, $q : E \longrightarrow E/Q$ kanonisch.

Sei N der Nullraum von $\tau(E,\varphi(H))$. Nach 2.8 ist N auch der Nullraum von $\tau(E,\varphi(H))^a$, so dass $\overline{\varphi(H)}$ das Bild von $(E/N,\tau(E,\varphi(H))^a/N)'$ ist, unter der Abbildung $(E/N)^* \longrightarrow E$, $f \mapsto f\circ p$, $p : E \longrightarrow E/N$ kanonisch. Ebenfalls nach 2.8 gilt $\tau(E,\varphi(H))^a/N = (\tau(E,\varphi(H))/N)^a$.

Wir sind offensichtlich mit dem Beweis fertig, wenn wir wissen, dass $N = Q$ ist und dass $\tau(E,\varphi(H))/Q = \tau(E/Q,H)$ gilt.

Die erste Beziehung folgt aus $N = (\varphi(H))^\circ = (\overline{\varphi(H)}^{\sigma(E',E)})^\circ = Q^{\circ\circ} = \overline{Q} = Q$. Zum Nachweis der anderen folgere man aus 2.4 : $\tau(E,\varphi(H))/Q = \tau(E/Q,L)$ - wobei $\varphi(L)$ die Polare von Q in $(E,\tau(E,\varphi(H)))' = \varphi(H)$ ist. Wegen $\varphi(H) \subset Q^\circ \subset E'$ gilt $\varphi(L) = Q^\circ \cap \varphi(H) = \varphi(H)$, d.h. $L = H$.

q. e. d.

Die Bedingung in 2.9 lässt sich noch in eine Form bringen, die im Fall α = tonneliert der Definition von VALDIVIA [40; Definition 2] entspricht. Der einfache Beweis bleibe dem Leser überlassen.

Korollar : Unter den Voraussetzungen von 2.9 ist ein l.k. Raum E genau dann stark minimal-α , wenn für jeden linearen Teilraum H von E* mit $H = \overline{H}$ gilt: $H \cap E'$ ist $\sigma(E',E)$-abgeschlossen.

§3 VOLLSTÄNDIGKEIT

Die Beschäftigung mit Vollständigkeitsfragen im Zusammenhang mit Graphensätzen hat ihren Ursprung bei V. PTAK [32]. Er zeigte, dass B_r-vollständige Räume [32; Def. 2, S. 50] vollständig sind [32; (5.7)]. Dabei benutzt er allerdings in starkem Masse die Dualitätstheorie l.k. Räume. Der erste mir bekannte Beweis, der direkt auf den Graphensatz zurückgreift, stammt von L. J. SULLEY [34; §4, corollary 3]. Seine Idee ermöglichte es mir, die Vollständigkeit der assoziierten tonnelierten Topologie eines separierten minimal-tonnelierten Raums zu zeigen [11; (1,5)]. In der Zwischenzeit habe ich den Beweis so vereinfachen können, dass man Vollständigkeitsaussagen auch für andere als minimal-tonnelierte Räume bekommt. Ferner behandeln wir den nichtseparierten Fall gleich mit. Dabei erzwingen wir die Existenz einer vollständigen Hülle durch die Forderung, dass die Nullräume von Vervollständigung und Ausgangsraum gleich sind.

3.1 Lemma : Sei (E,t) ein minimal-α Raum (α beliebig) und $\mathrm{id}^{\sim} : (E,t^a)^{\sim} \longrightarrow (E,t)^{\sim}$ die stetige Fortstzung der identischen Abbildung $\mathrm{id} : (E,t^a) \longrightarrow (E,t)$ auf die vollständigen Hüllen.

Dann gibt es kein $y \in (E,t^a)^{\sim}$ mit den Eigenschaften:

1° Der Quotient $(E + [y])/[y]$ des Teilraums $E + [y]$ von $(E,t^a)^{\sim}$ nach $[y]$ ist ein $\overline{\alpha}$-Raum.

2° $\mathrm{id}^{\sim}(y) \notin E$.

Beweis : Angenommen, es gibt ein y mit den angegebenen Eigenschaften. Dann ist wegen 2° y nicht aus E , und die kanonische Abbildung $f : (E,t) \longrightarrow (E + [y])/[y]$ bijektiv. Die Voraussetzung über E impliziert wegen 1° , dass f offen ist - sofern f^{-1} fastabgeschlossen ist. Nach der Bemerkung 3° auf S.16 bleibt f offen, wenn man (E,t) durch (E,t^a) erstzt. Dies bedeutet, dass $E + [y]$ topologisch direkte Summe von E und $[y]$ ist. Aus 2°

folgt weiter, dass y nicht im Nullraum von $(E,t^a)^\sim$ liegt - m. a. W. : der Teilraum $[y]$ von $(E,t^a)^\sim$ ist topologisch isomorph zu $\mathbb{K}$. Als Kern der stetigen, kanonischen Abbildung $E + [y] \longrightarrow [y]$ ist E abgeschlossen in $E + [y]$, im Widerspruch zu $y \in (E,t^a)^\sim \setminus E$.

Zum Nachweis der Fastabgeschlossenheit von f^{-1} betrachten wir folgendes kommutative Diagramm mit stetigen, kanonischen Abbildungen und dem Element $x := id^\sim(y)$:

$$\begin{array}{ccccc} (E,t^a) & \hookrightarrow & E + [y] & \longrightarrow & (E + [y])/[y] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (E,t) & \hookrightarrow & E + [x] & \longrightarrow & (E,+ [x])/[x] \end{array}$$

Dabei ist $E + [x]$ als Teilraum von $(E,t)^\sim$ aufzufassen.

Dem Diagramm entnimmt man, dass f^{-1} das Produkt der stetigen Abbildung $(E + [y])/[y] \longrightarrow (E + [x])/[x]$ mit der wegen 2^o existierenden kanonischen Abbildung $g : (E + [x])/[x] \longrightarrow (E,t)$ ist. Somit genügt es, g als fastabgeschlossen zu erkennen (1.3 b).

Bei separiertem (E,t) folgt das aus der Stetigkeit der Umkehrabbildung g^{-1}. Im allgemeinen Fall wende man 1.3 e auf g^{-1} an: Der Nullraum des Quotienten $(E + [x])/[x]$ ist gleich dem kanonischen Bild von $\overline{[x]}$, Abschluss in $E + [x]$. Die Bedingung von 1.3 e bedeutet somit $\overline{[x]} = \overline{\{0\}}^t + [x]$, und sie ist erfüllt, da $\overline{\{0\}}^t$ auch der Nullraum von $E + [x]$ ist und $[x]$ endlichdimensional ist.

q. e. d.

Das Lemma besagt, dass gewisse Elemente von $(E,t^a)^\sim \setminus E$ nicht auftreten. Dies kann man als Grad der Vollständigkeit der assoziierten $\overline{\alpha}$-Topologie eines minimal-α Raums ansehen. Für spezielle Klassen α erhalten wir:

3.2 Satz : a) Die assoziierte (quasi)tonnelierte Topologie eines minimal-(quasi)tonnelierten Raums ist vollständig.

b) Die assoziierte bornologische Topologie eines minimal-bornologischen Raums ist lokalvollständig.

c) Für die Klasse α aller Räume, die tonneliert und zugleich bornologisch sind, gilt: Die assoziierte $\overline{\alpha}$-Topologie eines minimal-α Raums ist lokalvollständig.

d) Für den assoziierten ultrabornologischen Raum (E,t^a) eines minimal-ultrabornologischen Raums (E,t) gilt: Jedes $y \in (E,t^a)^\sim$ für das es eine Folge (y_n) in E gibt, so dass $(y_n - y)$ eine Banachnullfolge in $E + [y]$ ist, liegt bereits in E.

Beweis : a) Wegen des Lemmas 3.1 genügt es zu zeigen, dass für einen minimal-(quasi)tonnelierten Raum (E,t) jedes y aus $(E,t^a)^\sim \setminus E$ die dort aufgeführten Eigenschaften 1^o und 2^o besitzt: Da ein l.k. Raum mit einem dichten (quasi)tonnelierten Teilraum selbst (quasi)tonneliert ist (vgl. [19; 18.7(v)] für tonneliert; für quasitonneliert geht der Beweis analog), ist die erste Bedingung erfüllt. Die zweite Bedingung gilt, weil $\mathrm{id}^\sim : (E,t^a)^\sim \longrightarrow (E,t)^\sim$ injektiv ist (der in [11; (1.2)] für separiertes t gegebene Beweis ist allgemein gültig). Damit ist a) bewiesen.

Teil a) folgt natürlich auch aus [11;(1.5)] - durch Zurückführung auf den separierten Fall mittels 1.5 a und 2.8 .

b) Wir benötigen das folgende Ergebnis von PFISTER :

Hilfssatz 1 : Besitzt ein l.k. Raum E einen lokaldichten, bornologischen Teilraum H, so ist auch E bornologisch.

Beweis des Hilfssatzes : Nach [15; 3.7, prop. 1.b] ist zu zeigen, dass jede beschränkte lineare Abbildung f von E in einen separierten l.k. Raum F stetig ist. Nun, die Einschränkung einer solchen Abbildung f auf H ist sicher beschränkt, also nach Voraussetzung stetig. Sie besitzt daher eine stetige lineare Fortsetzung g von $\overline{H} = E$ in die vollständige Hülle von F. Wir müssen jetzt $g = f$ zeigen und nehmen dazu ein $x \in E$. Nach Voraussetzung existiert eine Folge (x_n) in H, die lokal gegen x konvergiert. Aus der Beschränktheit von f folgt nun einerseits, dass $f(x_n) \to f(x)$ (siehe [24; 28.4(3)]); andererseits folgt aus der Stetigkeit von g, dass $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $g(x)$ konvergiert. Wegen der Separiertheit von f ist daher $f(x) = g(x)$. q. e. d.

Nun zum eigentlichen Beweis von Teil b) : Sei (E,t) ein l.k. Raum, dessen assoziierter bornologischer Raum (E,t^a) nicht lokalvollständig ist. Dann gibt es in (E,t^a) eine lokale Cauchyfolge (y_n) , die nicht lokal konvergiert. Als t^a-Cauchyfolge hat (y_n) in $(E,t^a)^\sim$ einen Limes y . Eine einfache Anwendung von [24; 18.4(4)] (gilt auch im nichtseparierten Fall) zeigt, dass y auch $(t^a)^\sim$-lokaler Limes von (y_n) ist. Somit besitzt $E + [y]$ den lokaldichten, bornologischen Teilraum (E,t^a) und ist damit (Hilfssatz 1) selbst bornologisch. y genügt also der Bedingung 1^o .

Die zweite Bedingung ist auch erfüllt: Denn aus Stetigkeitsgründen konvergiert (y_n) lokal in $(E,t)^\sim$ gegen $id^\sim(y)$. Da die lokale Konvergenz nur von den beschränkten Mengen abhängt, wäre $id^\sim(y) \in E$ ein Widerspruch zur Wahl von (y_n) .

Aus 3.1 folgt somit, dass (E,t) nicht minimal-bornologisch sein kann.

c) Der Beweis verläuft wie der von Teil b) , bis auf die Begründung, dass "$id^\sim(y) \in E$" die t^a-lokale Konvergenz von (y_n) nach sich zieht. Wir formulieren dies als

Hilfssatz 2 : Sei (E,t) ein l.k. Raum und t^a die gröbste tonnelierte und bornologische Topologie auf E, die feiner als t ist. Dann gilt:

Eine t^a-lokale Cauchyfolge (y_n) in E , die bzgl. t lokal gegen ein $y \in E$ konvergiert, ist t^a-lokalkonvergent gegen y .

Beweis des Hilfssatzes : Man überlegt sich sofort, dass man t^a durch transfinite Konstruktion gewinnen kann, und zwar durch $t_o := t$, $t_1 := \beta(t_o^\times)$ u.s.w. ; dabei ist $s^\times$ die assoziierte bornologische Topologie und $\beta(s)$ die starke Topologie einer l.k. Topologie s .

Die lokale Konvergenz zeigt man jetzt sukzessive. Für t_1 lautet die Begründung: Aus der t-lokalen Konvergenz folgt die $t^\times$-lokale Konvergenz. Da (y_n) wegen $t^a \geq t_1$ eine t_1-Cauchyfolge ist, folgt aus [24; 18.4(4)] die Konvergenz von (y_n) gegen y in $\beta(t^\times) = t_1$. Ausserdem ist (y_n) eine lokale t_1-Cauchyfolge, und so ist y sogar lokaler t_1-Limes von (y_n) (vgl. Beweis von b)). Die nicht aufgeführten Schritte für Limeszahlen

bereiten keinerlei Schwierigkeiten.

Damit sind Hilfssatz 2 und Teil c) des Satzes bewiesen.

d) Als erstes zeigen wir, dass für ein y der angegebenen Art der Teilraum $F := E + [y]$ von $(E,t^a)^\sim$, und damit auch $(E + [y]) / [y]$ ultrabornologisch ist.

Dazu ist nach 2.7 c zu zeigen, dass F die Mackeytopologie trägt, und dass jede auf allen Banachnullfolgen von F beschränkte Linearform $f \in F^*$ stetig ist. F trägt die Mackeytopologie, da der dichte Teilraum $E = (E,t^a)$ sie trägt (vgl. [19; 18.9(ii)]). Bzgl. der Stetigkeit von f gehe man wie bei Hilfssatz 1 vor. Dabei muss man lediglich wissen, dass f Banachnullfolgen in Nullfolgen überführt - was leicht zu sehen ist: Denn ist (z_n) in F stetiges, lineares Bild einer Nullfolge (x_n) eines Banachraums, dann existiert nach [24; 28.3(1)] eine Folge positiver Zahlen λ_n, $\lambda_n \to \infty$, so dass $\lambda_n x_n \to 0$. Daher ist $(\lambda_n z_n)$ eine Banachnullfolge in F, weswegen nach Voraussetzung über f die Menge $\{ \lambda_n f(z_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ beschränkt ist. Hieraus folgt $f(z_n) \to 0$, womit die Zwischenbehauptung gezeigt ist.

Nach dem Lemma 3.1 gilt also für ein y der angegebenen Art $\tilde{id}(y) \in E$. Hieraus folgt nun $y \in E$:

Denn aus Stetigkeitsgründen ist $(y_n - \tilde{id}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Banachnullfolge in (E,t), also Bild einer Nullfolge eines Banachraums G unter einer stetigen linearen Abbildung $g : G \longrightarrow (E,t)$. Nach der Bemerkung 3^o auf S.16 ist dann $g : G^a \longrightarrow (E,t^a)$ stetig, was wegen $G^a = G$ bedeutet, dass $(y_n - \tilde{id}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Banachnullfolge in (E,t^a) ist. Nach Wahl von y folgt nun $y - \tilde{id}(y) \in \overline{\{0\}}$, Abschluss in $(E,t^a)^\sim$, woraus sich wie gewünscht $y \in E$ ergibt.

q. e. d.

3.3 Bemerkungen zum Satz 3.2 :

a) Es gibt stark minimal-tonnelierte Räume, die nicht lokalvollständig sind, z.B. abzählbarunendlich-dimensionale metrisierbare l.k. Räume (vgl. 1.9 d).

b) Es gibt stark minimal-tonnelierte Räume, deren starke Topologie nicht lokalvollständig ist [35; §4].

c) Es gibt bornologische, tonnelierte stark minimal-bornologische Räume, die nicht quasivollständig sind, z.B. $\mathbb{K}^{[I]}$, für überabzählbares I (siehe 5.1). Ich weiss nicht, ob man "quasivollständig" durch "folgenvollständig" ersetzen kann.

d) Es gibt ultrabornologische stark minimal-ultrabornologische Räume, die nicht lokalvollständig sind, z.B. jeder nicht lokalvollständige (LF)-Raum (siehe [24; 31.6] für einen solchen Raum). Jeder (LF)-Raum ist nämlich nach [24; 19.5(4)] minimal-ultrabornologisch. Ferner ist leicht zu sehen, dass jeder separierte Quotient eines (LF)-Raums ein (LF)-Raum ist, so dass ein (LF)-Raum sogar stark minimal-ultrabornologisch ist.

e) Als Spezialfall von 3.2 a erhält man, dass ein unvollständiger tonnelierter Raum (E,t) nicht minimal-tonneliert ist. Nach 1.8 existiert daher auf E eine echt gröbere tonnelierte Topologie s mit $\overline{\{0\}}^{s} = \overline{\{0\}}^{t}$. So ein s kann man explizit angeben, und zwar ist es die Initialtopologie auf E von $(E + [y])/[y]$ bzgl. der kanonischen Abbildung, $y \in \tilde{E} \setminus E$ (vgl. Beweis von 3.1). Man sieht sogar, dass im Beweis von 3.1 folgendes Vergröberungsverfahren versteckt ist. Es lautet:

> Sei E ein topologischer Vektorraum, und $y \in \tilde{E} \setminus E$. Dann erhält man mittels der kanonischen Abbildung $E \longrightarrow (E + [y])/[y]$ auf E eine echt gröbere Vektorraumtopologie, deren Nullraum mit dem von E übereinstimmt.

Eine triviale Folgerung hieraus ist, dass ein unvollständiger normierbarer (bzw. metrisierbarer) l.k. Raum eine echt gröbere normierbare (bzw. metrisierbare) l.k. Topologie besitzt.

3.4 Korollar 1 zu Satz 3.2 : Für einen minimal-bornologischen Raum (E,t) gilt :

a) (E,t) ist lokalvollständig, und die zu t assoziierte bornologische Topologie ist tonneliert.

b) Die zu t assoziierte quasitonnelierte Topologie ist gleich

der assoziierten tonnelierten Topologie von t .

c) (E,t) ist (genau dann) minimal-quasitonneliert, wenn er minimal-tonneliert ist.

Beweis : a) und b) folgen sofort aus Teil b) des Satzes 3.2, wenn man beachtet, dass die lokale Vollständigkeit nur von den beschränkten Mengen abhängt, und dass ein lokalvollständiger quasitonnelierter Raum tonneliert ist (vgl. [24; 27.1(1)]).

c) Zum Beweis der nichttrivialen Richtung benutzen wir 1.8 . Sei also s eine l.k. Topologie auf E mit $\overline{\{0\}}^{s} = \overline{\{0\}}^{t}$ und $s \leq t$. Weil (E,t) minimal-tonneliert ist, folgt, dass die assoziierten tonnelierten Topologien von s und t übereinstimmen. Andererseits impliziert die Obervoraussetzung über (E,t) , dass (E,s) minimal-bornologisch ist (vgl. 1.5 d). Eine Anwendung von Teil b) dieses Korollars auf (E,s) und (E,t) zeigt dann die Gleichheit der assoziierten quasitonnelierten Topologien.

q. e. d.

Teil c) lässt sich auch so formulieren:

Die minimal-quasitonnelierten Räume sind genau die Räume, die minimal-tonneliert und minimal-bornologisch sind.

Eine Anwendung der Vollständigkeit der assoziierten tonnelierten Topologie eines minimal-tonnelierten Raums war eine Verallgemeinerung eines Graphensatzes von A.P. und W. ROBERTSON, siehe [11]. Als nächstes möchte ich zeigen, wie mit der Vollständigkeitsaussage 3.2 a einige Sätze in [40] bewiesen werden können, und zwar einfacher und mit ganz allgemeinen Schlüssen. In [40] fehlt die Vollständigkeitsaussage. Sie folgt zwar sofort aus [40; teorema 14] (vgl. 3.5 c), wie mir VALDIVIA mitteilte; jedoch ist teorema 14 eine Konsequenz der nun von mir betrachteten Sätze, kann also dort nicht zur Vereinfachung beitragen.

3.5 Korollar 2 zu Satz 3.2 : Gegeben sei ein l.k. Raum E, ein linearer Teilraum L von E, ein separierter l.k. Raum F und eine lineare Abbildung $f : L \to F$. Dann gilt:

a) Ist der Graph von f in $E \times F$ abgeschlossen, L tonneliert und F minimal-tonneliert, dann ist L abgeschlossen [40; 13].
b) Ist der Graph von f in $E \times F$ abgeschlossen, $f(L)$ tonneliert und E stark minimal-tonneliert, dann ist $f(L)$ abgeschlossen [40; 19] - vgl. auch [27; (1.1)].
c) Ist f stetig, L tonneliert und F minimal-tonneliert, dann existiert eine stetige lineare Fortsetzung von f auf $\overline{L}$ [40; 14 und 1.14].

Beweis : a) Aus den Voraussetzungen und der Bemerkung 3° auf S.16 folgt die Stetigkeit von $f : L \to F^a$, F^a der zu F assoziierte tonnelierte Raum. Ferner ist der Graph von f in $E \times F^a$ abgeschlossen und F^a ist vollständig (3.2 a). Daher ist L abgeschlossen in E : Sei nämlich $x \in \overline{L}$ und (x_μ) ein gegen x konvergentes Netz in L. Dann ist $(f(x_\mu))$ ein Cauchynetz in F^a und somit gegen ein y aus F konvergent. Der Punkt (x,y) liegt also im Abschluss des Graphen von f bzgl. $E \times F^a$; es folgt $x \in L$.

b) Wende die Aussage a) an auf die in natürlicher Weise zu f gehörige Abbildung $f(L) \longrightarrow E / \mathrm{Ker}(f)$; dabei sei $f(L)$ Teilraum von F.

c) Wie bei a) folgt, dass $f : L \to F^a$ eine gleichmässig stetige Abbildung in einen separierten vollständigen Raum ist. Ein allgemeiner Fortsetzungssatz aus der Theorie uniformer Räume ergibt die Existenz einer stetigen Fortsetzung von f auf $\overline{L}$. Diese ist ist offenbar stetig als Abbildung von $\overline{L}$ in F und wegen der Separiertheit auch linear.

q. e. d.

Die Theoreme 7, 8, 9, 10 von [40] fassen wir zusammen in

3.6 Satz : Sei F l.k., E ein abzählbar-kodimensionaler linearer Teilraum von F. Ist E (stark) minimal-tonneliert, so gilt dasselbe für F.

Beweis : 1^o Sei E minimal-tonneliert und F ohne Einschränkung (1.5 a) separiert. Ferner sei eine g-abgeschlossene lineare Abbildung f von einem tonnelierten Raum X nach F gegeben, deren Stetigkeit zu zeigen ist. Dazu schränken wir f ein, und zwar im Definitionsbereich auf $f^{-1}(E)$ und im Ziel auf E ; diese Abbildung heisse f_1 . Man überlegt sich leicht, dass die Kodimension von $f^{-1}(E)$ in X nicht grösser ist als die von E in F (z.B. betrachte man die zu $X \to F \longrightarrow F/E$ gehörige Injektion). Daher ist $f^{-1}(E)$ tonneliert [39; th. 3], und aus den anderen Voraussetzungen folgt die Stetigkeit von f_1 . Nach 3.5 c lässt sich f_1 stetig und linear auf $Y := f^{-1}(E)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung hat aber wegen der Graphenabgeschlossenheit von f in $X \times F$ dieselben Werte wie f .

Wir haben bis jetzt gezeigt, dass die Einschränkung von f auf Y stetig ist. Nun hat Y als abgeschlossener, abzählbar-kodimensionaler Teilraum des tonnelierten Raums X einen topologischen Komplementärraum N , der die feinste l.k. Topologie trägt (wende [9; III.1.2, exercise 4] an auf X/Y). Die Einschränkung von f auf N ist trivialerweise stetig, so dass $f : X \to F$ stetig ist.

2^o Sei schliesslich E stark minimal-tonneliert. Es ist zu zeigen, dass jeder Quotient F/Q minimal-tonneliert ist. Dies folgt aus dem gerade Bewiesenen; denn F/Q enthält den abzählbar-kodimensionalen Teilraum $(E + Q)/Q$, der als stetiges Bild von E minimal-tonneliert ist (1.5 f).

q. e. d.

Aus dem Satz und aus 1.5 c folgt sofort, dass das Produkt $X \times E$ eines abzählbar-dimensionalen l.k. Raums X mit einem l.k. Raum E genau dann (stark) minimal-tonneliert ist, wenn es E ist. Hier ordnet sich bei Beachtung von 1.7 , Korollar 3 das folgende unveröffentlichte Resultat von D. van DULST (Universität Amsterdam) als Spezialfall ein:

> Das Produkt $\varphi \times E$ (φ topologisch direkte Summe $\bigoplus_1^\infty E$, E tonneliert) ist genau dann B_r-(bzw. B-)vollständig, wenn E B_r-(bzw. B-)vollständig ist.

Die Sätze von VALDIVIA haben natürlich Analoga für minimal-quasitonneliert, minimal-bornologisch und minimal-(tonneliert und bornologisch):

3.7 Korollar 3 zu Satz 3.2 :

a) Ersetzt man in Korollar 2 tonneliert durch quasitonneliert, dann erhält man die gleichen Aussagen.

b) Ersetzt man in Korollar 2 tonneliert durch bornologisch bzw. durch bornologisch und tonneliert, dann erhält man in a) und b), dass L und f(L) bezüglich lokaler Folgen abgeschlossen sind. In Teil c) erhält man eine Fortsetzung auf die lokalabgeschlossene Hülle von L in E .

3.8 Satz : Für die Klasse α aller quasitonnelierten, bzw. bornologischen, bzw. bornologischen und tonnelierten Räume gilt:

Ist E ein (stark) minimal-α Teilraum endlicher Kodimension in einem l.k. Raum F , dann ist F (stark) minimal-α .

Beweis : Er verläuft im wesentlichen wie bei 3.6 . Dabei beachte man, dass ein lokalabgeschlossener, endlich-kodimensionaler Teilraum eines bornologischen Raums abgeschlossen ist [21; 5.2]. Zur Quasitonneliertheit von Hyperebenen siehe [38].

q. e. d.

Für unendliche Kodimension ist der letzte Satz falsch: Man nehme in einem abzählbarunendlich-dimensionalen Raum F als Teilraum E den Nullraum. Dies gibt wegen 1.9 d ein Gegenbeispiel für "bornologisch" und somit für "quasitonneliert". Für "bornologisch und tonneliert" fehlt ein Gegenbeispiel. Es ist auch nicht bekannt, ob sich "bornologisch und tonneliert" auf abzählbar-kodimensionale Teilräume vererbt.

§4 PRODUKTE

Der allgemeinen Betrachtungsweise folgend, orientieren wir uns an den Ergebnissen über Produkte von B-vollständigen Räumen. Die allgemeine Theorie ist recht mager und beschränkt sich auf einen Satz von N. MOCHIZUKI [27; Theorem 2.1] nebst Korollaren, ein Resultat von S.O. IYAHEN [18; Theorem 3.3] und M. WINKLER [41; (3.11)], und die Bemerkung zu 3.6 .

Der erste Teil des Satzes von MOCHIZUKI wurde etwas verschärft von J.W. BAKER [6; Theorem 3]. Für minimal-α Räume (α beliebig) lautet das entsprechende Resultat so :

4.1 Satz : Seien E, F stark minimal-α und G ein α-Raum. Eine stetige lineare Abbildung $f : E \times F \to G$ ist offen, wenn

$$\overline{f(E \times \{0\})} \subset f(E \times V) \quad \text{für alle Nullumgebungen } V \text{ in } F,$$
$$\overline{f(\{0\} \times F)} \subset f(U \times F) \quad \text{für alle Nullumgebungen } U \text{ in } E,$$

und wenn G die algebraisch direkte Summe von $f(E \times \{0\})$ und $f(\{0\} \times F)$ ist.

Die ersten beiden Bedingungen sind erfüllt, wenn $f(E \times \{0\})$ und $f(\{0\} \times F)$ in G abgeschlossen sind.

Beweis : Wie bei loc. cit. unter Benutzung von 1.7 . q. e. d.

Der andere, bijektive Fall des Satzes von MOCHIZUKI hat folgendes Analogon:

4.2 Satz : Auf dem Produkt $(E,t) \times (F,s)$ zweier minimal-α Räume gibt es keine echt gröbere α-Topologie r , bzgl. der E und F abgeschlossen sind (E, F kanonisch in $E \times F$ eingebettet).

Beweis : Sei r eine α-Topologie auf $E \times F$, gröber als $t \times s$

und so, dass E und F r-abgeschlossen sind. Betrachtung der kanonischen Abbildung $(E,t) \longrightarrow (E,r|E) \longrightarrow (E \times F, r)/F$ liefert wegen 1.7, Korollar 1 $t = r|E$ und $r = r|E \oplus r|F$ (topologisch). Aus Gründen der Symmetrie folgt $s = r|F$, also $r = t \times s$.

q. e. d.

4.3 Korollar 1 : Sei (E,t) ein α-Raum und zugleich minimal-α. Dann ist jede algebraisch direkte Zerlegung $E = A \oplus B$ in abgeschlossene lineare Teilräume topologisch (vgl. [27; Cor. 2.1.]).

Beweis : Eine Möglichkeit des Beweises besteht darin, den Satz 4.2 und 1.5 c auf $(A,t|A) \times (B,t|B)$ und die Topologie $r := t$ anzuwenden. Einfacher ist jedoch die Betrachtung der kanonischen, stetigen Abbildung $p : (A,t|A) \longrightarrow (E,t)/B$. Weil A minimal-α ist (1.5 c) und $(E,t)/B$ ein $\overline{\alpha}$-Raum, ist p^{-1} stetig, was zu zeigen war.

q. e. d.

4.4 Korollar 2 : E sei ein minimal-α Raum, in dem jeder abgeschlossene lineare Teilraum einen abgeschlossenen algebraischen Komplementärraum besitzt. Dann ist E stark minimal-α (vgl. [27; Cor. 2.2.]).

Beweis : Nach 1.5 genügt es zu zeigen, dass jeder separierte Quotient E/Q minimal-α ist. Sei dazu P ein abgeschlossener algebraischer Komplementärraum von Q in E, und $q : P \longrightarrow E/Q$ die kanonische Abbildung. Die Behauptung folgt nun mittels 1.5 c und 1.5 d.

q. e. d.

Zu 4.2 bis 4.4 ist zu bemerken, dass die Aussagen nur für separierte Räume interessant sind; denn für nichtseparierte Räume sind es wahre Behauptungen über die leere Menge.

Wir kommen nun zum Satz von IYAHEN, der besagt, dass das Produkt eines separierten, tonnelierten B_r-vollständigen Raums mit einem separierten minimal-l.k. Raum B_r-vollständig ist. Wegen 1.7, Korollar 3 ist dies eine Aussage über tonnelierte minimal--tonnelierte Räume.

Der Beweis hierfür verläuft mittels 1.8 , Korollar ähnlich wie bei 4.2 : Nur beginnt man mit einer gröberen separierten tonnelierten Topologie r und schliesst s = r|F nicht aus Symmetrie-, sondern aus Minimalitätsgründen. Den allgemeinen Fall, d.h. ohne den B_r-vollständigen Raum als tonneliert vorauszusetzen, hat WINKLER in seiner Diplomarbeit bewiesen. Bei der gleichen Gelegenheit zeigte er, dass (in meiner Terminologie) das separierte Produkt eines minimal-α Raums mit einem minimal-l.k. Raum minimal-α ist [41; (3.10)].

Mein Beitrag besteht darin, analoge Sätze für stark minimal-α, B-vollständig und (schwach) t-polar zu beweisen.

4.5 Satz : Das Produkt eines minimal-l.k. Raums mit einem (stark) minimal-α Raum ist (stark) minimal-α (α beliebig).

Beweis : Sei E (stark) minimal-α , F minimal-l.k. . Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass E und F separiert sind (1.5 a).
Fall 1 (WINKLER [41; (3.10)]) : E ist minimal-α .
Sei $f : G \longrightarrow (E \times F, t)$, t die Produkttopologie, eine g-abgeschlossene lineare Abbildung von einem α-Raum G nach $(E \times F, t)$. Auf $E \times F$ existiert bekanntlich (1.2 e) eine separierte l.k. Topologie s , $s \leq t$, für welche f stetig ist. Es gilt $s|F = t|F$ (vgl. 1.9 a), und somit hat F einen topologischen Komplementärraum M in $(E \times F, s)$ [8; II.6, exercise 13b, S.149]. Aus $s \leq t$ und $s|F = t|F$ folgt durch Betrachtung der Projektion $P : E \times F \longrightarrow F$ mit Kern M , dass die Zerlegung $E \times F = M \oplus F$ auch für t topologisch ist.

Die Stetigkeit von f ist somit äquivalent zur Stetigkeit von $P \circ f : G \longrightarrow (F, t|F)$ und $P' \circ f : G \longrightarrow (M, t|M)$, P' die zu P gehörige Projektion auf M mit $\mathrm{Ker}(P') = F$. Für $P \circ f$ folgt die Behauptung aus der Stetigkeit von $f : G \longrightarrow (E \times F, s)$ und von

$P : (E \times F, s) \longrightarrow (F, s|F)$ und aus $s|F = t|F$. Bei $P' \circ f$ beachte man, dass $(M, t|M)$ topologisch isomorph ist zu E und dass $P' \circ f$ bzgl. $s|M$ stetig ist und daher einen abgeschlossenen Graphen bzgl. $t|M$ hat (1.2 e).

Fall 2 : E ist stark minimal-α .

Der Beweis ergibt sich aus 1.5 b , dem soeben bewiesenen Fall 1 und dem anschliessenden Lemma.

q. e. d.

4.6 Lemma : Ein separierter Quotient eines Produkts $\mathbb{K}^I \times E$, E separiert l.k., ist topologisch isomorph zu einem Produkt der Form $\mathbb{K}^J \times (E/Q)$, Q ein abgeschlossener linearer Teilraum von E .

Beweis : Wir betrachten zu einem abgeschlossenen linearen Teilraum P von $\mathbb{K}^I \times E$ die kanonische Abbildung $p : \mathbb{K}^I \times E \longrightarrow$ $\rightarrow (\mathbb{K}^I \times E)/P$. Nach [8; II, §6, exercise 13c] und 1.9 a ist $p(\mathbb{K}^I \times \{0\})$ ein separierter minimal-l.k. Teilraum des l.k. Raums $(\mathbb{K}^I \times E)/P$ und hat folglich einen topologisch direkten Summanden B [loc. cit. 13b].

B ist also topologisch isomorph zu $((\mathbb{K}^I \times E)/P)/p(\mathbb{K}^I \times \{0\})$. Auf Grund des zweiten Isomorphiesatzes [7; III, §2.7, Korollar zu Satz 22] ist der letzte Raum isomorph zu

$$(\mathbb{K}^I \times E)/p^{-1}(p(\mathbb{K}^I \times \{0\})) = (\mathbb{K}^I \times E)/(\mathbb{K}^I \times \{0\} + P) .$$

Dieser Raum ist aus dem nämlichen Grund isomorph zu

$$\left((\mathbb{K}^I \times E)/(\mathbb{K}^I \times \{0\}) \right) / \left((\mathbb{K}^I \times \{0\} + P)/(\mathbb{K}^I \times \{0\}) \right) .$$

Schliesslich folgt aus $(\mathbb{K}^I \times E)/(\mathbb{K}^I \times \{0\}) \cong E$, dass B topologisch isomorph ist zu einem Quotienten E/Q von E .

q. e. d.

4.7 Satz : Sei F separiert, minimal-l.k. und E separiert, l.k. . Die folgenden Eigenschaften übertragen sich von E auf das topologische Produkt $E \times F$: a) B_r-vollständig, b) B-vollständig, c) schwach t-polar, d) t-polar .

Beweis : Teil a) stammt von WINKLER [41; (3.11)] : Man beachte beim Beweis von 4.5 , Fall 1 , dass mit $f : G \longrightarrow (E \times F,t)$ auch $P' \circ f : G \to (M,t|M)$ faststetig ist, da $P' : (E \times F,t) \longrightarrow (M,t|M)$ stetig ist.

Teil b) folgt aus Teil a) mit Hilfe des obigen Lemmas, ebenso Teil d) aus Teil c) , da E genau dann t-polar ist, wenn jeder separierte Quotient von E schwach t-polar ist.

Bei c) gehe man aus von einem dichten, quasiabgeschlossenen linearen Teilraum H von $((E \times F)' , \sigma((E \times F)', E \times F))$. Zu zeigen ist $H = (E \times F)'$ [9; S.55].
Weil H dicht ist, erhält man wie beim Fall 1 des Beweises von 4.5 eine direkte Zerlegung $E \times F = M \oplus F$ bzgl. der Topologien t und $\sigma(E \times F, H)$. Nach Identifikation von $(E \times F)'$ mit $M' \times F'$ ergibt sich H in der Form $H_1 \times F'$, $H_1 \subset M'$. Aus den Voraussetzungen über H folgt, dass H_1 ein dichter, quasiabgeschlossener linearer Teilraum von $(M', \sigma(M', M))$ ist. Da M zu E topologisch isomorph ist, folgt $H_1 = M'$ und damit $H = (E \times F)'$.

q. e. d.

Da ein minimal-l.k. Raum minimal-α ist für jede Klasse α l.k. Räume, wirft 4.5 die Frage auf, ob das Produkt (zweier) beliebiger (stark) minimal-α Räume (stark) minimal-α ist. Für die Klasse α der tonnelierten Räume hat man folgende Gegenbeispiele:

A) Es gibt ein Produkt zweier tonnelierter, stark minimal-tonnelierter Räume, das nicht stark minimal-tonneliert ist.

B) Es gibt ein Produkt (mit überabzählbarer Indexmenge) von tonnelierten, stark minimal-tonnelierten Räumen, das nicht minimal-tonneliert ist.

Zu A) nehme man ein nicht B-vollständiges Produkt zweier tonnelierter B-vollständiger Räume, z.B. [36; Theorem 1] oder [19; Problem 20.D, S.195].
(Anmerkung zu [19] : In der vorgeschlagenen Realisierung $E := l^p$ und $F := l^q$ mit $1 < q < p < \infty$ ist $E^{(\omega)} := \bigoplus_1^\infty E$ B-vollständig als Mackeydual des Fréchet-Raums $\prod_1^\infty (E', \tau(E', E))$; $F^\omega := \prod_1^\infty F$ ist

als Fréchet-Raum B-vollständig. Nach Teil a) von loc. cit. hat $E^{(\omega)} \times F^{\omega}$ einen unvollständigen Quotienten, ist also nicht B-vollständig.)

Zu B) nehme man ein nicht B_r-vollständiges Produkt von Banachräumen [10; S.278, Absatz 2]; die Überabzählbarkeit der Indexmenge ist aus der Konstruktion ersichtlich.

Dabei ist bei A) und B) das Korollar 3 von 1.7 zu beachten.

Es ist jedoch offen, ob das Produkt abzählbar vieler (tonnelierter) minimal-tonnelierter Räume minimal-tonneliert ist.

Zum letzten Problem bringen wir ein Beispiel, das nicht zur Lösung führte. Es ist dies $\omega\varphi = \prod_1^\infty \bigoplus_1^\infty \mathbb{K}$ in der Summen- und Produkttopologie. Dass φ stark minimal-tonneliert ist, haben wir in 1.9 d festgestellt.

4.8 Satz : $\omega\varphi$ ist stark minimal-tonneliert (also nach 1.7 , Korollar 3 B-vollständig).

Beweis : Nach [14; §6, Satz 1, S.138] hat jeder abgeschlossene lineare Teilraum von $\omega\varphi$ einen topologischen Komplementärraum. Deshalb reduziert sich das Problem auf die Minimal-Tonneliertheit von $\omega\varphi$ (4.4 , Korollar 2).

Zum Beweis der letzteren verwenden wir das Kriterium 1.8 , Korollar. Sei t die natürliche Topologie auf $\omega\varphi$ und (F_i, t_i) der Teilraum $\prod_1^i \varphi$ von $\omega\varphi$. Gegeben sei auf $\omega\varphi$ eine tonnelierte, separierte Topologie s mit $s \leq t$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ bilden wir auf F_i die l.k. Finaltopologie s_i von s bzgl. der kanonischen Projektion $p_i : \omega\varphi \longrightarrow F_i$.

Nehmen wir für den Augenblick an, die Topologien s_i seien separiert. Weil mit s auch s_i tonneliert ist und weil (F_i, t_i) topologisch isomorph zu φ ist, folgt dann $s_i = t_i$ (vgl. 1.9 d). Somit ist t gleich der Initialtopologie auf $\omega\varphi$ bzgl. der

Abbildungen $p_i : \omega\varphi \longrightarrow (F_i, s_i)$ und als solche gröber als s. Wegen $s \leq t$ folgt $s = t$, was zu zeigen ist.

Der Nachweis der Separiertheit von s_i, $i \in \mathbb{N}$ erfordert etwas mehr Aufmerksamkeit und geschieht in drei Schritten. Dazu benötigen wir die kanonische Projektion $\pi_k : F_{k+1} \longrightarrow F_k$ von F_{k+1} auf die ersten k Koordinaten. Ferner sei für eine Menge A aus F_k $\overline{A}^k$ der Abschluss in (F_k, s_k).

1° $\quad \pi_k(\overline{\{0\}}^{k+1}) = \overline{\{0\}}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Da s_k die Finaltopologie von s_{k+1} bzgl. π_k ist, gilt $\overline{\{0\}}^k = \pi_k(\overline{\mathrm{Ker}(\pi_k)}^{k+1})$. Nun ist die assoziierte separierte Topologie von s_{k+1} die feinste l.k. Topologie [9; III, §1.2, exercise 4]. Weil in einem Raum mit der feinsten l.k. Topologie jeder lineare Teilraum abgeschlossen ist [19; Problem 14.D, S.124], folgt, dass $\mathrm{Ker}(\pi_k) + \overline{\{0\}}^{k+1}$ bzgl. s_{k+1} abgeschlossen ist. Dazu äquivalent ist $\overline{\mathrm{Ker}(\pi_k)}^{k+1} = \mathrm{Ker}(\pi_k) + \overline{\{0\}}^{k+1}$, was die Behauptung ergibt.

2° $\quad \overline{\{0\}}^i = p_i\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} p_k^{-1}(\overline{\{0\}}^k)\Big)$, $i \in \mathbb{N}$.

Beweis: Mit Hilfe von 1° definiere man zu jedem $x \in \overline{\{0\}}^i$ durch Induktion eine Folge (y_k) aus $\bigcap_{k=1}^{\infty} p_k^{-1}(\overline{\{0\}}^k)$ mit $p_i((y_k)) = x$. Damit ist die nichttriviale Inklusion gezeigt.

3° Man verifiziert leicht die folgende Gleichungskette, wobei beim vorletzten Gleichheitszeichen $s \leq t$ zu beachten ist:

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} p_k^{-1}(\overline{\{0\}}^k) = \bigcap \{\, p_k^{-1} p_k(U) \mid U \text{ s-Nullumgebung}, k \in \mathbb{N} \,\} =$$

$$= \bigcap_U \Big(\bigcap_k \big(U + \prod_{k+1}^{\infty} \varphi \big) \Big) = \bigcap_U (U + U) = \overline{\{0\}}^s .$$

Da s nach Voraussetzung separiert ist, folgt aus 2° und 3° die Separiertheit aller Topologien s_i.

Damit ist der Satz 4.8 vollständig bewiesen.

q. e. d.

4.9 Korollar : Für jede Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abzählbar-dimensionalen Räumen ist $\prod_1^\infty E_n$ stark minimal-tonneliert.

Beweis : Da $\prod_1^\infty E_n$ stetiges Bild von $\omega\varphi$ ist, folgt wegen 1.5 f die Behauptung aus 4.8 .

q. e. d.

Dual zur Produktbildung ist die Bildung von l.k. direkten Summen. Hier lässt sich allgemeiner angeben, wann sich die Eigenschaft, minimal-α zu sein, nicht vererbt:

4.10 Satz : Existiert ein separierter $\overline{\alpha}$-Raum F, der nicht die feinste l.k. Topologie trägt, so ist keine l.k. direkte Summe $\bigoplus_{\mu\in I} E_\mu$ von separierten l.k. Räumen $E_\mu \neq \{0\}$ minimal-α, sofern die Mächtigkeit von I grösser oder gleich der (algebraischen) Dimension von F ist.

Beweis : Trivial, wegen der Invarianz von minimal-α bei der Bildung von abgeschlossenen Teilräumen (1.5 c).

q. e. d.

Nimmt man für α = bornologisch als F den Teilraum $\bigoplus_1^\infty \mathbb{K}$ des topologischen Produkts $\prod_1^\infty \mathbb{K}$, so erhält man aus dem Satz, dass $\mathbb{K}^{(I)}$ (l.k. direkte Summe) nur für endliches I minimal-bornologisch ist.

Für α = tonneliert erhält man aus 4.10 ($F := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), dass $\mathbb{K}^{(I)}$ nicht minimal-tonneliert ist, falls die Mächtigkeit von I mindestens gleich dim $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$ [24; 9.5(5)] ist.

Ob ohne Annahme der Kontinuumshypothese richtig ist, dass $\mathbb{K}^{(I)}$ für jede überabzählbare Indexmenge nicht minimal-tonneliert (d.h. wegen 1.7, Korollar 3 nicht B_r-vollständig) ist, weiss ich nicht.

Die Aussage A) (S.48) zeigt, dass die l.k. direkte Summe zweier tonnelierter, stark minimal-tonnelierter Räume i.a. nicht stark minimal-tonneliert ist.

Wie es um die Minimal-Tonneliertheit von abzählbaren l.k. direkten Summen minimal-tonnelierter Räume bestellt ist, weiss ich nicht. φ ist ein Beispiel dafür, dass die Minimal-tonneliertheit erhalten bleibt. Den dafür von BOURBAKI [9; III, §1.2, exer. 4] vorgeschlagenen Beweis kann man ohne allzu grosse Mühe verallgemeinern auf abzählbare l.k. direkte Summen von minimal-l.k. Räumen. Der Komplementärraumsatz von HAGEMANN [14; §6, Satz 2] zeigt dann, dass $\varphi\omega$ stark minimal-tonneliert ist (4.4 , Korollar 2). Es gilt sogar mehr, nämlich

4.11 Satz : Jede l.k. direkte Summe einer Folge von minimal-l.k. Räumen ist stark minimal-tonneliert (also nach 1.7 , Korollar 3 B-vollständig).

Beweis : Sei E die l.k. direkte Summe der Folge (E_n) von minimal-l.k. Räumen, E_n ohne Einschränkung separiert.

Eine Möglichkeit des Beweises ist durch die Bemerkungen vor diesem Satz angedeutet. Man müsste dazu den Komplementärraumsatz für E beweisen. Dies ist möglich, aber zusammen mit der Verallgemeinerung der Übungsaufgabe von BOURBAKI wäre der Beweis von 4.11 sehr lang. Wesentlich schneller kommt man mit der dualen Charakterisierung stark minimal-tonnelierter Räume ans Ziel:

Nach 2.9 ist zu zeigen, dass für jeden linearen Teilraum H von E' gilt $\overline{H}^{\sigma(E',E)} \subset \overline{H}$, wobei $\overline{H}$ die schwach-quasivollständige Hülle von H in E^* ist. Wie man leicht sieht, ist diese Bedingung erfüllt, wenn jedes Element von $\overline{H}^{\tau(E',E)}$ $\tau(E',E)$-Limes einer Folge aus H ist.

Zum Nachweis dieser Eigenschaft identifizieren wir $(E',\tau(E',E))$ mit $\prod_1^\infty (E_n',\tau(E_n',E_n))$ [24; 22.5(2) und 22.5(3)]. Da E_n minimal-l.k. ist, folgt, dass $\tau(E_n',E_n)$ die feinste l.k. Topologie auf E_n' ist. Für einen linearen Teilraum $H \subset E'$ ist daher $P_n(H)$

abgeschlossen in $\prod_{n=1}^{i} (E_n', \tau(E_n', E_n))$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wobei p_i die kanonische Projektion von $\prod_{i}^{\infty} E_n'$ auf die ersten i Faktoren ist. Somit ist $\overline{H} \subset p_i^{-1} p_i(H) = H + \prod_{n=i+1}^{\infty} E_n'$ (aufgefasst als Teilraum von $\prod_{i}^{\infty} E_n'$). Für $x \in \overline{H}$ existieren also $y_i \in \prod_{i+1}^{\infty} E_n'$ und $h_i \in H$ derart, dass $x = y_i + h_i$. Da $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ trivialerweise eine $\tau(E',E)$-Nullfolge ist, ist x wie gewünscht aus dem $\tau(E',E)$-Folgenabschluss von H.

q. e. d.

Aus 4.8 und 4.11 ergibt sich ein weiteres Beispiel zu A) auf S.48 (beachte 1.7, Korollar 3):

4.12 Satz: $\varphi\omega \oplus \omega\varphi$ ist ein nicht B-vollständiges Produkt zweier B-vollständiger Räume.

Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass $\varphi\omega \oplus \omega\varphi$ nicht B-vollständig ist. Dies geschieht durch Angabe eines unvollständigen Quotienten, und zwar hat man da zwei Möglichkeiten: Entweder überlegt man sich, dass [24; 13.6(2)] auch im l.k. Fall richtig ist (nach einer schriftlichen Mitteilung von Prof. G. KÖTHE wurde der ursprüngliche Beweis (Math. Z. 51,17-35(1947)) für den l.k. Fall durchgeführt), oder man verweist auf die schon auf S.48 zitierte Übungsaufgabe 20.D von KELLEY-NAMIOKA mit $E := \omega$ und $F := \varphi$.

q. e. d.

§5 BEISPIELE

5.1 Ein stark minimal-bornologischer Raum :

Sei $(E_\mu)_{\mu\in I}$ eine Familie von separierten minimal-l.k. Räumen. Wir betrachten $\prod'_{\mu\in I} E_\mu := \{ x = (x_\mu)_{\mu\in I} \in \prod_{\mu\in I} E_\mu \mid x_\mu \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $\mu \in I \}$ in der vom Produkt induzierten Topologie t .

a) $\prod'_I E_\mu$ ist stark minimal-bornologisch.

Beweis : Nach 1.9 c und 1.5 b ist zu zeigen, dass auf jedem separierten Quotienten $(\prod'_\mu E_\mu)/Q$ für jede separierte l.k. Topologie s mit $s \leq t/Q$ gilt: Jede s-beschränkte Menge ist t/Q - beschränkt. Dazu äquivalent ist, dass jede s-lokale Nullfolge t/Q - beschränkt ist [24; 28.3(3)].

Zu einer s-lokalen Nullfolge (x_n) wähle man $y_n \in \prod'_\mu E_\mu$ mit $p(y_n) = x_n$, p die kanonische Quotientenabbildung. Die Folge (y_n) liegt dann in einem Teilprodukt $\prod_J E_\mu$, $J \subset I$ abzählbar. Da stetige, separierte lineare Bilder von minimal-l.k. Räumen minimal-l.k. sind [8; II.6, exercise 16c], stimmen auf $p(\prod_J E_\mu)$ die Quotiententopologie t/Q und s überein. Die Folge (x_n) ist also t/Q - beschränkt.

q. e. d.

Zum Beweis der nächsten Aussage benötigen wir folgendes Ergebnis von PFISTER :

Hilfssatz : Ist $(E_\mu)_{\mu\in I}$ eine Familie von bornologischen Räumen, dann ist jeder Teilraum M des Produkts mit $\bigoplus_I E_\mu \subset M \subset \prod'_I E_\mu$ bornologisch.

Beweis : Da $\bigoplus_I E_\mu$ - wie man sofort sieht - lokaldicht in $\prod'_I$

ist, reduziert sich der Beweis wegen des Hilfssatzes 1 im Beweis von 3.2 b auf den Fall $M = \bigoplus_I E_\mu$.

Hierfür ist nach [15; 3.7 prop. 1.b] zu zeigen, dass jede beschränkte lineare Abbildung f von M in einen normierten Raum $(F, \|.\|)$ stetig ist. Zu einer solchen Abbildung f existiert eine endliche Menge $J \subset I$, so dass $\bigoplus_{I \setminus J} E_\mu$ im Kern von f enthalten ist; denn sonst gäbe es eine Folge (y_n) in $\bigoplus_I E_\mu$ mit $\|f(y_n)\| = n$ und $\{ \mu \in I \mid \mathrm{proj}_\mu(y_{n+1}) \neq 0 \} \cap \{ \mu \in I \mid$ es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ mit $\mathrm{proj}_\mu(y_k) \neq 0 \} = \emptyset$, im Widerspruch zur Beschränktheit von f. Da nun $\bigoplus_I E_\mu$ die topologisch direkte Summe der Teilräume $\bigoplus_{I \setminus J} E_\mu$ und $\bigoplus_J E_\mu$ ist, bleibt die Stetigkeit von $f \mid \bigoplus_J E_\mu$ zu zeigen. Dies folgt aber wegen der Beschränktheit von $f \mid \bigoplus_J E_\mu$ aus der Tatsache, dass $\bigoplus_J E_\mu$ als l.k. direkte Summe aufzufassen ist (J endlich) und daher bornologisch ist.

q. e. d.

b) $\prod'_I E_\mu$ ist tonneliert, bornologisch, folgenvollständig und, falls $E_\mu \neq \{0\}$ für überabzählbar viele $\mu \in I$, nicht quasivollständig.

Beweis : Folgenvollständig ist trivial; bornologisch ist er nach dem Hilfssatz; wegen dieser beiden Eigenschaften ist er auch tonneliert ([24; 27.1(1)] - vgl. auch 6.6 c); zur letzten Behauptung wähle man in jedem Faktor - sofern möglich - ein $x_\mu \neq 0$ und betrachte $\{ y = (y_\mu) \in \bigoplus_I E_\mu \mid y_\mu \in \{0, x_\mu\}$ für alle $\mu \in I \}$.

q. e. d.

5.2 Folgerungen : a) Nicht jeder (bornologische, tonnelierte, stark) minimal-bornologische Raum ist minimal-tonneliert.
b) Nicht jeder (bornologische, tonnelierte, stark) minimal-tonnelierte Raum ist minimal-bornologisch.
c) Es gibt (tonnelierte) stark minimal-bornologische Räume, die nicht bornologisch sind.

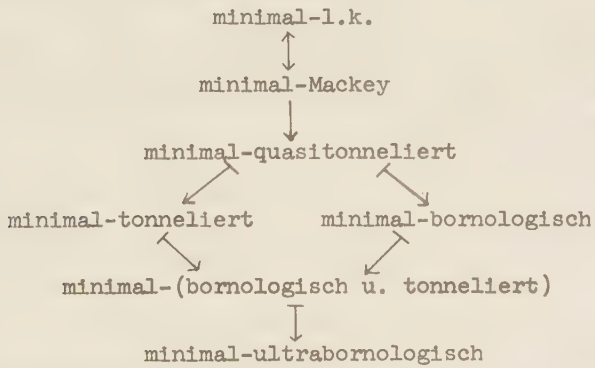
Beweis : a) Jeder Raum $\prod'_{\mu\in I} E_\mu$ mit separierten, minimal-l.k. Räumen $E_\mu \neq \{0\}$ und überabzählbarer Indexmenge I leistet wegen 5.1 und 3.2 a das Gewünschte.

b) Nach 1.9 d ist $\varphi = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{K}$ (l.k. direkte Summe) geeignet.

c) Jeder im Beweis von a) angegebene Raum ist tonneliert und unvollständig. Daher existiert auf jedem eine echt gröbere tonnelierte separierte Topologie (3.3 e). Solche Vergröberungen sind wegen 1.5 e und 1.8 ($\prod'_I E_\mu$ bornologisch !) geeignete Beispiele.

q. e. d.

Die Beziehungen zwischen verschiedenen Arten von Minimalität lassen sich in einem Diagramm veranschaulichen:



Ein Pfeil bedeutet Implikation; ein Pfeil mit Querstrich meint eine nicht umkehrbare Implikation; ein Pfeil mit zwei Spitzen heisst Äquivalenz.

Die Äquivalenz steht in 1.9 a verzeichnet.

Die Implikationen sind unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen.

Ein Beispiel eines minimal-ultrabornologischen Raums, der nicht minimal-(bornologisch u. tonneliert) ist, ist wegen 3.2 c und 3.3 d jeder nicht lokalvollständige (LF)-Raum.

Dass die übrigen entsprechend gekennzeichneten Implikationen nicht umkehrbar sind, folgt bei den nach rechts gerichteten Pfeilen aus 5.2 a, bei den nach links gerichteten aus 5.2 b.

Zu bemerken ist, dass ein Raum genau dann minimal-quasitonneliert ist, wenn er minimal-bornologisch und minimal-tonneliert ist (3.4 c). Schliesslich ist es offen, ob jeder minimal-quasitonnelierte Raum minimal-l.k. ist.

Für den Begriff s t a r k m i n i m a l - α gilt ein analoges Diagramm. Dabei stimmt stark minimal-l.k. mit minimal-l.k. überein (1.9 a). Ob für die anderen Eigenschaften Ähnliches gilt, weiss ich nicht; man denke dabei auch an die ungeklärte Beziehung zwischen B-vollständig und B_r-vollständig.

Schliesslich kann man hier den Pfeil zwischen stark minimal--Mackey und stark minimal-quasitonneliert umdrehen, wie wir gleich sehen werden (5.5 b).

Unser Beispiel 5.1 eines stark minimal-bornologischen Raums ist tonneliert und trägt die schwache Topologie. Diese zwei Eigenschaften sind allen stark minimal-bornologischen Räumen zu eigen, wie aus 1.7 , Korollar 2 und dem nächsten Satz folgt:

5.3 Satz : Ist E ein l.k. Raum, so dass jede stetige, surjektive lineare Abbildung von E auf einen l.k. (separablen, schwach) metrisierbaren Raum offen ist, dann trägt E die schwache Topologie und ist tonneliert.

Beweis (Gemeinsam mit PFISTER) : Es ist zu zeigen, dass in E' jede $\sigma(E',E)$-beschränkte Menge endlich-dimensional ist.

Wir schliessen indirekt und erhalten eine schwach-beschränkte Folge (f_n) linear unabhängiger Vektoren aus E' . Die Abbildung $g : E \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $x \longmapsto (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist linear, stetig und hat ein separables, schwach-metrisierbares Bild. Nach Voraussetzung ist g relativ offen. Dies ist ein Widerspruch, denn

Fall 1 : $g(E)$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Dann ist $g(E)$ ein unvollständiger metrisierbarer l.k. Raum und hat so eine echt gröbere, metrisierbare l.k. Topologie (3.3 e). Die durch g vermittelte Abbildung von E auf $g(E)$, $g(E)$ versehen mit der gröberen Metrik, ist dann stetig, aber nicht offen. Beachtet man noch, dass eine l.k. Topologie, die gröber ist als eine (separable) schwache Topologie, selbst (separabel) schwach ist [20; prop. 1.2], so hat man einen Widerspruch zur Voraussetzung über E .

Fall 2 : $g(E)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Dann ist $g(E)$ schwach-vollständig und daher topologisch isomorph zu einem $\mathbb{K}^I$ (mit abzählbarem I) [8; II.6, prop. 9, S.102]. Nun ist g ja relativ offen und stetig, so dass $E/\mathrm{Ker}(g)$ topologisch isomorph zu $g(E)$ ist. Die schwachen Dualräume sind dann auch isomorph. Wir identifizieren nun das schwache Dual von $E/\mathrm{Ker}(g)$ mit dem Teilraum $(\mathrm{Ker}(g))^\circ$ von $(E',\sigma(E',E))$ und das von $\mathbb{K}^I$ mit $(\mathbb{K}^{(I)},\sigma(\mathbb{K}^{(I)},\mathbb{K}^I))$. Da in $(\mathrm{Ker}(g))^\circ = (\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(f_i))^\circ$ alle f_i , $i \in \mathbb{N}$ liegen, bekommen wir in der l.k. direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}$ eine beschränkte, nicht endlich-dimensionale Menge - Widerspruch (z.B. [19; 14.8(ii)]).

q. e. d.

Bemerkung zum Satz : Dichte, nicht tonnelierte Teilräume von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ zeigen, dass man in 5.3 "metrisierbar" nicht durch "normierbar" ersetzen kann.

5.4 Korollar : Besitzt E zusätzlich die Eigenschaft, dass es auf ihm keine echt gröbere tonnelierte Topologie gibt, deren Nullraum mit dem von E übereinstimmt, dann ist E minimal-l.k. .

Beweis : Nach 5.3 ist E tonneliert. Die Zusatzbedingung besagt also nichts anderes, als dass E minimal-tonneliert ist (1.8). Nach 3.2 a (oder auch 3.3 e) ist E vollständig, d.h. wegen 5.3 schwach-vollständig, was wegen 1.9 a mit minimal-l.k. gleichbedeutend ist.

q. e. d.

5.5 Satz : a) Ein stark minimal-bornologischer Raum ist tonneliert und trägt die schwache Topologie. Umgekehrt ist ein schwach tonnelierter Raum nicht notwendig minimal-bornologisch.

b) Ein stark minimal-bornologischer Raum, der minimal-tonneliert (wegen 3.4 c also minimal-quasitonneliert) ist, ist minimal-l.k..

c) Ein stark minimal-quasitonnelierter Raum ist minimal-l.k. .

Beweis : a) Den ersten Teil haben wir uns schon vor 5.3 klargemacht. Als Beispiel für den zweiten Teil nehme man tonnelierte, unvollständige Teilräume von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; sie sind wegen 3.2 b nicht minimal-bornologisch.

b) Unter Beachtung von Teil a) schliesse man ähnlich wie in 5.4 . Teil c) schliesslich folgt aus b) .

q. e. d.

Die im Beweis von 5.5 verwendeten Schlüsse ergeben, dass für für einen l.k. Raum E folgende Bedingungen äquivalent sind:

1° Jede g-abgeschlossene, surjektive lineare Abbildung von E auf einen separierten, quasitonnelierten Raum ist offen, d.h. E ist stark minimal-quasitonneliert (1.7).

2° Jede stetige, surjektive lineare Abbildung von E auf einen separierten, quasitonnelierten Raum ist offen.

Beweis : Die Richtung von 1^o nach 2^o ist trivial. Ist 2^o gegeben, dann sieht man sofort, dass E die Voraussetzungen von 5.4 erfüllt (bei nichtseparientem E ist ein Zwischenschritt über $E/\overline{\{0\}}$ nötig). Demnach ist E minimal-l.k., also stark minimal-l.k. (1.9 a). Wegen 1.7 gilt dann 1^o .

q. e. d.

Für andere als quasitonnelierte Zielräume können 1^o und 2^o inäquivalent sein, z.B. für tonnelierte Räume. Dies haben wir schon nach 1.7 , Korollar 2 gesehen.

Eine andere Folgerung aus 5.5 ist, dass jeder nichttriviale (d.h. nicht minimal-l.k.) minimal-quasitonnelierte Raum ein Beispiel ist für einen minimal-bornologischen Raum, der nicht stark minimal-bornologisch ist.

Der folgende Satz ist die Antwort auf die Frage, welche metrisierbaren minimal-bornologischen Räume es gibt (vgl. 1.9 c). Triviale Beispiele sind $\mathbb{K}^I$, I abzählbar, und dies sind auch alle :

5.6 Satz (PFISTER): Jeder metrisierbare l.k. Raum, der nicht schwach-vollständig ist, besitzt eine echt gröbere metrisierbare l.k. Topologie.

Beweis : 1. Unproblematisch ist die Sache für unvollständige metrisierbare l.k. Räume - vgl. 3.3 c .

2. Ein anderer, nicht schwieriger Fall sind die separablen metrisierbaren l.k. Räume:

Jeder separable metrisierbare l.k. Raum, der nicht schwach--vollständig ist, besitzt eine echt gröbere metrisierbare l.k. Topologie.

Beweis: Das schwache Dual eines separablen, metrisierbaren l.k. Raums $E = (E,t)$ besitzt nach [24; 21.3(5)] einen dichten abzählbar-dimensionalen linearen Teilraum H. Daher ist $\sigma(E,H)$ metrisierbar und somit gilt $\sigma(E,H) = \tau(E,H)$. Falls nun H echt enthalten ist in E', ist $\sigma(E,H)$ die gewünschte Vergröberung. Falls $H = E'$, dann gilt $t = \tau(E,E') = \sigma(E,E')$. In diesem Fall vergröbere man nach 1.

3. Wir zeigen jetzt, wie sich Vergröberungen auf Teilräumen zu Vergröberungen des ganzen Raums fortsetzen lassen:

Dazu sei (E,t) ein l.k. Raum, $L \subset E$ ein abgeschlossener linearer Teilraum und auf L sei eine l.k. Topologie s gegeben mit $s \leq t|L$ und $\overline{\{0\}}^{s} = \overline{\{0\}}^{t}$.

Die Identität $id_L : (L,s) \longrightarrow (L,t|L)$ ist also fastabgeschlossen (1.2 e). Wegen der Abgeschlossenheit von L ist die Inklusion $(L,s) \longrightarrow (E,t)$ fastabgeschlossen (1.1), d.h. nach 1.2 f, der Nullraum der Finaltopologie r auf E bzgl. $(L,s) \longrightarrow E$ und $(E,t) \longrightarrow E$ ist gleich $\overline{\{0\}}^{t}$. Falls s echt gröber als $t|L$ war, ist auch r echt gröber als t.

Bedenkt man noch, dass die Mengen $U + V$ eine Nullumgebungsbasis von r bilden, falls U, V Nullumgebungsbasen von s bzw. t durchlaufen, so erhält man:

> Jeder metrisierbare l.k. Raum, der einen abgeschlossenen linearen Teilraum mit echt gröberer l.k. Metrik besitzt, hat selbst eine echt gröbere l.k. Metrik.

4. Mit 2. und 3. ist die Behauptung des Satzes für jeden metrisierbaren l.k. Raum gezeigt, der einen abgeschlossenen, separablen, nicht schwach-vollständigen Teilraum besitzt. Darunter fallen aber alle uns interessierenden Räume, denn es gilt:

> Ein metrisierbarer l.k. Raum E, in dem jeder abgeschlossene, separable lineare Teilraum schwach-vollständig ist, ist schwach-vollständig.

Beweis: Es genügt die Separabilität von E zu zeigen. Das geht aber im wesentlichen wie beim Beweis von [24; 27.2(5)], dass jeder Fréchet-Montel-Raum separabel ist. Und zwar ersetze man den drittletzten Satz des dortigen Beweises durch:

"Nach Voraussetzung über E ist $\overline{L\{ x_n \mid n\in\mathbb{N} \}}$ schwach-vollständig, also ein Montelraum. Daher ist die nach Konstruktion beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ präkompakt."

Der Satz 5. 6 ist vollständig bewiesen.

q. e. d.

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Nachwort zum ersten Kapitel :

Weitere Verallgemeinerungen von minimal-tonneliert sind möglich, wenn man von den l.k. Räumen zu topologischen Vektorräumen (oder Teilkategorien davon, falls Finaltopologien existieren) übergeht. Wir sind nur indirekt darauf eingegangen, indem wir die Beweise möglichst ohne Dualitätstheorie führten (Motto: "Beweise ohne Dualitätstheorie gelten auch in der nicht-l.k. Situation"). Ein konkretes Beispiel für eine mögliche Verallgemeinerung sind die Arbeiten [3], [4] von ADASCH.

Als Beispiel für das angedeutete Beweisprinzip möge die im Anschluss an [3; 4(7)] gestellte Frage dienen: Ein s-Raum (in $\mathfrak{L}$) (Definition loc. cit. S.139) wäre bei uns nach 1.7 ein "stark minimal-ultratonnelierter" Raum. Nach 1.5 c ist daher ein abgeschlossener Teilraum eines s-Raums wieder ein s-Raum, was die Frage beantwortet.

II. GN-RÄUME UND GM-RÄUME

§6 CHARAKTERISIERUNGEN UND PERMANENZEIGENSCHAFTEN

Im ersten Kapitel haben wir l.k. Räume E durch die Forderung definiert, dass der "stetige Graphensatz" für Abbildungen von F nach E gelte, wobei F über eine vorgelegte Klasse von l.k. Räumen variierte. Wir vertauschen jetzt die Rollen von E und F und befassen uns mit folgendem Spezialfall:

6.1 DEFINITION
Ein l.k. Raum E heisst GN-Raum (bzw. GM-Raum), wenn jede g-abgeschlossene lineare Abbildung von E in einen normierbaren (bzw. metrisierbaren) l.k. Raum F stetig ist.

Der Leser wird sich vielleicht wundern, warum die Zielräume F nicht wie in §1 aus einer beliebigen, gegebenen Klasse α gewählt werden. Der Grund dafür ist, dass ich über so allgemein definierte Räume nur dies weiss:

1° An die Stelle der minimal-l.k. Räume bei den minimal-α Räumen treten hier die Räume mit der feinsten l.k. Topologie, d.h.: Die separierten l.k. Räume E mit der Eigenschaft, dass jede g-abgeschlossene lineare Abbildung von E in einen l.k. Raum F stetig ist, sind die Räume mit der feinsten l.k. Topologie.

2° Sie sind invariant bei Bildung von l.k. Finaltopologien (vgl. dazu den Übergang von minimal-α zu minimal-$\overline{\alpha}$ (1.6 d)).

3° Die Definition hängt nur vom assoziierten separierten Raum ab (vgl. dazu die Beziehung zwischen minimal-α und minimal-$\alpha_\circ$ (1.6 a)). - Die hierfür wesentliche Überlegung ist: Für eine g-abgeschlossene lineare Abbildung $f : E \to F$ gilt $\overline{\{0\}} \subset \mathrm{Ker}(f)$. Daher existiert die kanonische Abbildung $E / \overline{\{0\}} \longrightarrow E / \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow F$, und sie ist g-abgeschlossen als Produkt einer stetigen mit einer g-abgeschlossenen Abbildung.

Dass wir gerade normierbare bzw. metrisierbare Räume F betrachten, liegt an folgendem Satz von MAHOWALD [26; 2.2.] und an den weit über 1°, 2° und 3° hinausgehenden Ergebnissen für die in 6.1 definierten Räume:

> Ein separierter l.k. Raum E ist genau dann tonneliert, wenn für jeden Banachraum F gilt:
>
> Jede lineare Abbildung f von E nach F mit abgeschlossenem Graphen ist stetig.

Dabei kann bekanntlich "Banachraum" durch "Fréchet-Raum" ersetzt werden (z.B. [32; (4.9) und (6.3)]).

Die diesem Kapitel zugrunde liegende Frage lautet nun: Wie kann man diejenigen tonnelierten Räume beschreiben, die man erhält, wenn in den Mahowaldschen Charakterisierungen auf die Vollständigkeit der Räume F verzichtet wird? Und welche Permanenzeigenschaften haben diese Räume im Vergleich zu tonnelierten Räumen?

6.2 ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN

a) Räume mit der feinsten l.k. Topologie sind GN- und GM-Räume.
b) L.k. Finalräume von GN- bzw. GM-Räumen sind GN- bzw. GM-Räume.
c) Ein l.k. Raum ist genau dann ein GN- bzw. GM-Raum, wenn es sein assoziierter separierter Raum ist.
d) Jeder GM-Raum ist ein GN-Raum.
e) Alle GN-Räume sind tonneliert.
f) Ein l.k. Raum E ist genau dann ein GN- bzw. GM-Raum, wenn jede surjektive g-abgeschlossene lineare Abbildung von E auf einen normierbaren bzw. metrisierbaren l.k. Raum stetig ist.

BEWEIS Ich möchte nur zeigen, wie man e) direkt sieht:
Sei (E,t) ein GN-Raum, $T \subset E$ eine t-Tonne und s die durch T definierte Halbnormtopologie auf E. Die Gleichung

$$\cap \{U + \lambda T \mid U \text{ t-Nullumgebung}, \lambda > 0\} = \bigcap_{\lambda>0} \overline{\lambda T}^{t} = \overline{\{0\}}^{s}$$

zeigt nach 1.2 f und 1.2 b , dass der Graph der kanonischen Abbildung $(E,t) \longrightarrow (E,s)/\overline{\{0\}}^{s}$ abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung ist die Abbildung stetig, daher auch $id : (E,t) \longrightarrow (E,s)$. Das bedeutet aber, dass T eine t-Nullumgebung ist.

q. e. d.

Bei Punkt f) möchte ich darauf hinweisen, dass man sich in der oben erwähnten Charakterisierung von tonnelierten Räumen nicht auf surjektive Abbildungen beschränken kann: Jeder abzählbar-dimensionale l.k. Raum E hat nämlich die Eigenschaft, dass jede surjektive g-abgeschlossene lineare Abbildung f von E auf einen Fréchet-Raum stetig ist (betrachte $E/\mathrm{Ker}(f)$) - unabhängig davon, ob E tonneliert ist.

6.3 PRODUKTE VON GM-RÄUMEN

Für eine Familie $(E_\mu)_{\mu\in I}$ von l.k. Räumen gilt:

Das Produkt $\prod_{\mu\in I} E_\mu$ ist genau dann ein GM-Raum, wenn alle E_μ GM-Räume sind, und wenn für höchstens endlich viele Indizes μ die Topologie von E_μ von der gröbsten verschieden ist.

BEWEIS Ist das Produkt ein GM-Raum, so sind auch alle Faktoren GM-Räume, da sie topologisch isomorph sind zu einem Quotienten des Produkts (vgl. 6.2 b). Es bleibt zu zeigen, dass fast alle Faktoren die gröbste Topologie tragen. Wir schliessen indirekt und erhalten einen Quotienten von $\prod_\mu E_\mu$, der zu $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ isomorph ist. Folglich wäre $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ein GM-Raum, was nicht der Fall ist: Denn durch Hinzunahme einer unstetigen Seminorm zu allen stetigen Seminormen auf $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ erhält man eine echt feinere metrisierbare l.k. Topologie, woraus sofort ein Widerspruch zur Definition eines GM-Raums entsteht (vgl. Beweis von 6.8).

Die umgekehrte Richtung folgt aus 6.2 b und 6.2 c , da unter den gegebenen Bedingungen der zu $\prod_\mu E_\mu$ assoziierte separierte

Raum topologisch isomorph ist zu einem endlichen Produkt von GM-Räumen.

q. e. d.

6.4 PRODUKTE VON GN-RÄUMEN

Sei $(E_\mu)_{\mu\in I}$ eine Familie l.k. Räume und M ein linearer Teilraum des Produkts, der $\Pi'_{\mu\in I} E_\mu$ (vgl. 5.1) umfasst. Dann gilt:

M ist genau dann ein GN-Raum, wenn jedes E_μ ein GN-Raum ist.

BEWEIS Der Schluss von M auf die Faktoren ist der gleiche wie beim vorigen Satz, wobei die letzte Voraussetzung über M zu benutzen ist.

In der anderen Richtung wenden wir eine Technik von IYAHEN an ([16; Lemma 3.1], [17; Lemma 1] und [18; 2.2.]), die wohl auf KÖTHE [24; 28.4(4)] zurückgeht. Alle E_μ seien GN-Räume und $f : M \to F$ eine g-abgeschlossene lineare Abbildung von M in einen normierten Raum F. Man zeigt nun, dass " f einen grossen Kern hat" - das soll heissen, es gibt eine endliche Menge $J \subset I$ mit $M \cap \prod_{\mu\in I\setminus J} E_\mu \subset \mathrm{Ker}(f)$ [1]) (Lemma 6.5).

Die Stetigkeit von f ergibt sich dann sehr schnell: Die Einschränkung von f auf $M \cap \prod_J E_\mu = \prod_J E_\mu$ ist eine g-abgeschlossene lineare Abbildung des GN-Raums $\prod_J E_\mu$ (6.2 b : J endlich !) in den normierten Raum F; sie ist also stetig. Die Einschränkung von f auf $M \cap \prod_{I\setminus J} E_\mu$ ist trivialerweise stetig. Da M die topologische direkte Summe von $\prod_J E_\mu$ und $M \cap \prod_{I\setminus J} E_\mu$ ist (man schränke die kanonische Projektion $\prod_I E_\mu \longrightarrow \prod_J E_\mu$ auf M ein), folgt die Stetigkeit von f.

Bis auf das Lemma vom grossen Kern ist damit 6.4 bewiesen.

q. e. d.

---

[1]) $\prod_{\mu\in H} E_\mu$ werde für $H \subset I$ als Teilraum von $\prod_{\mu\in I} E_\mu$ aufgefasst.

6.5 LEMMA

F sei ein topologischer Vektorraum, der eine abzählbare Überdeckung aus beschränkten Mengen besitzt. Ferner sei eine Familie $(E_\mu)_{\mu\in I}$ von topologischen Vektorräumen gegeben und ein linearer Teilraum M von $\prod_{\mu\in I} E_\mu$, der $\prod'_{\mu\in I} E_\mu$ umfasst. Dann gilt:

Für jede g-abgeschlossene lineare Abbildung $f : M \to F$ gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit

$$M \cap \prod_{I\setminus J} E_\mu \subset \mathrm{Ker}(f) .$$

BEWEIS (Zusammen mit PFISTER) Da der Kern einer g-abgeschlossenen linearen Abbildung ein abgeschlossener linearer Teilraum ist, genügt es die Existenz eines endlichen $J \subset I$ zu zeigen mit

$$E_\mu \subset \mathrm{Ker}(f) \quad \text{für alle } \mu \in I\setminus J .$$

Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es eine injektive Folge $i : \mathbb{N} \to I$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in E_{i(n)}$, das nicht im Kern von f liegt. Wegen $\overline{\{0\}}^M \subset \mathrm{Ker}(f)$ ist der Teilraum $\prod_1^\infty [x_n]$ von $\prod_{\mu\in I} E_\mu$ topologisch isomorph zu $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Wegen $\prod'_{\mu\in I} E_\mu \subset M$ kann man f auf $\prod_1^\infty [x_n]$ einschränken. Die Einschränkung ist ebenfalls g-abgeschlossen, ebenso wie die zugehörige kanonische Bijektion $g : (\prod_1^\infty [x_n])/N \to f(\prod_1^\infty [x_n])$. Nun ist jeder separierte Quotient eines minimal-l.k. Raums minimal-l.k. (vgl. 1.9 a), und ein separierter minimal-l.k. Raum ist auch minimal bzgl. separierter Vektorraumtopologien [8; II.6, exer. 1]. Aus 1.2 e (unter Berücksichtigung des Nachworts zu Kapitel I) folgt daher die Stetigkeit von g^{-1}.

Hiermit folgt wegen der Voraussetzung über F, dass der Baire-Raum $(\prod_1^\infty [x_n])/N$ eine abzählbare Überdeckung aus beschränkten Mengen besitzt. Es gibt daher eine abgeschlossene, beschränkte Menge mit nichtleerem Inneren, was mit der Existenz einer beschränkten Nullumgebung äquivalent ist. Dies bedeutet, dass $(\prod_1^\infty [x_n])/N$ normierbar ist [24; 15.10(4)] und daher als Raum, der eine schwache Topologie trägt, endliche Dimension besitzt [24; Bem. nach 20.2(4)]. Jetzt haben wir einen Widerspruch, denn

kein Element der linear unabhängigen Menge $\{ x_n \mid n\in\mathbb{N} \}$ liegt in $N = \mathrm{Ker}(f) \cap \prod_1^\infty [x_n]$.

q. e. d.

6.6 KOROLLAR

a) Fordert man in 6.5 die Stetigkeit der Abbildung f an Stelle der Graphenabgeschlossenheit, so erhält man ein endliches

$$J \subset I \quad \text{mit} \quad M \cap \prod_{I\setminus J} E_\mu \subset f^{-1}(\overline{\{0\}}^F) .$$

b) Ersetzt man in 6.5 F durch einen metrisierbaren l.k. Raum und "g-abgeschlossen" durch "stetig", so erhält man ein abzählbares $J \subset I$ mit $M \cap \prod_{I\setminus J} E_\mu \subset \mathrm{Ker}(f)$.

c) Ist $(E_\mu)_{\mu\in I}$ eine Familie von tonnelierten Räumen, so ist jeder lineare Teilraum zwischen $\prod'_I E_\mu$ und $\prod_I E_\mu$ tonneliert.

BEWEIS a) Man verlängere die Abbildung f nach $F/\overline{\{0\}}^F$.
b) Als metrisierbarer l.k. Raum trägt F die Initialtopologie bzgl. einer Folge von normierten Räumen F_n und linearen Abbildungen $p_n : F \to F_n$. Nach dem Lemma existieren daher endliche Mengen $J_n \subset I$, so dass $M \cap \prod_{I\setminus J_n} E_\mu \subset \mathrm{Ker}(p_n \circ f)$. Es folgt mit $J := \bigcup_1^\infty J_n$, dass

$$M \cap \prod_{I\setminus J} E_\mu \subset \bigcap_1^\infty \mathrm{Ker}(p_n \circ f) = f^{-1}\Big(\bigcap_1^\infty p_n^{-1}(0) \Big) = f^{-1}(0) .$$

c) Man verwende die Mahowald-Charakterisierung von separierten tonnelierten Räumen [26; 2.2.], die nach der Bemerkung 3° auf S.63 auch im nichtseparierten Fall richtig ist. Der Beweis geht wie für GN-Räume in 6.4 , nur fängt man mit einem Banachraum F an und benutzt, dass ein endliches Produkt von tonnelierten Räumen tonneliert ist.

q. e. d.

6.7 BEMERKUNGEN

a) Unsere Voraussetzung an F im Lemma 6.5 ist schwächer als die von IYAHEN gemachten:

vollständig und lokalbeschränkt [16; Lemma 3.1] ,

strikter induktiver Limes einer Folge von Banachräumen [17; Lemma 1] ,

folgenvollständig und Fundamentalfolge von beschränkten Mengen [18; 2.2.] .

b) Die Forderung an F , eine abzählbare Überdeckung aus beschränkten Mengen zu besitzen (vgl. 6.5) ist echt schwächer als die, dass in F eine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen existiert. Ein einfaches Beispiel hierfür ist der Teilraum der finiten Vektoren in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Er hat eine abzählbare Überdeckung aus beschränkten Mengen, z.B. $B_m := \{ x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid |x_n| \leq m$ für alle $n\in\mathbb{N} \}$, hat aber keine Fundamentalfolge von beschränkten Mengen, da er sonst normierbar wäre [24; 29.1(2)].

c) Aus dem Beweis von 6.4 destilliert man leicht folgendes Sätzchen:

Sei F ein topologischer Vektorraum mit einer abzählbaren Überdeckung aus beschränkten Mengen, $f : M \to F$ eine g-abgeschlossene lineare Abbildung - wobei M ein linearer Teilraum eines Produkts $\prod_\mu E_\mu$ topologischer Vektorräume ist mit $M \supset \prod'_\mu E_\mu$. Dann gilt:

f ist stetig (genau dann), wenn alle Einschränkungen von f auf endliche Teilprodukte stetig sind.

Die restlichen Untersuchungen dieses Paragraphen beruhen auf:

6.8 INTERNE BESCHREIBUNG

Ein l.k. Raum E ist genau dann ein GN- (bzw. GM-) Raum, wenn er tonneliert ist und wenn er folgende "Quotientenbedingung" erfüllt:

Jeder Quotient von E mit einer stetigen Norm (bzw. stetigen l.k. Metrik) trägt die feinste l.k. Topologie.

BEWEIS Wir zeigen die Behauptung nur für GM-Räume, da der Beweis für GN-Räume analog geht.

a) Sei $E = (E,t)$ ein GM-Raum. Die Tonneliertheit von E wissen wir bereits (6.2 d und 6.2 e). Sei nun $(E,t)/Q$ ein Quotient, auf dem eine gröbere metrisierbare l.k. Topologie s existiert. Falls t/Q nicht die feinste l.k. Topologie auf E/Q ist, existiert auf E/Q eine t/Q-unstetige Seminorm q. Wir betrachten nun das Supremum r von s und der durch q erzeugten Topologie. r ist klarerweise metrisierbar, l.k. und feiner als s. Nach 1.2 e ist $id_{E/Q} : (E/Q, t/Q) \longrightarrow (E/Q, r)$ g-abgeschlossen und wegen 6.2 b stetig. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von q.

b) Umgekehrt sei E ein tonnelierter Raum, der die Metrik-Quotientenbedingung erfüllt, und $f : E \to F$ eine g-abgeschlossene lineare Abbildung in einen metrisierbaren l.k. Raum F. Offensichtlich ist f stetig, wenn auf $E/\mathrm{Ker}(f)$ eine gröbere metrisierbare l.k. Topologie existiert.

Zum Nachweis einer solchen betrachten wir die zu f gehörige bijektive Abbildung $g : f(E) \longrightarrow E/\mathrm{Ker}(f)$. Da g g-abgeschlossen ist (1.2 c und 1.3 e), gilt mit $Q := \mathrm{Ker}(f)$ (vgl. 1.2 f) $\{0\} = \cap \{ \overline{g(U)+V} \mid U, V$ Nullumgebung in $f(E)$ bzw. $E/Q \}$. Die l.k. Topologie auf E/Q mit den Mengen $\overline{g(U)}$, U Nullumgebung in $f(E)$, als Nullumgebungsbasis ist also separiert und - da $f(E)$ metrisierbar ist - halbmetrisierbar. Sie ist schliesslich gröber als die Quotiententopologie von E/Q, da alle $\overline{g(U)}$ Tonnen in E/Q sind und weil E als tonneliert vorausgesetzt war.

q. e. d.

Bekanntlich ist ein l.k. Raum E genau dann tonneliert, wenn er die Mackeytopologie trägt und wenn das schwache Dual quasivollständig ist [24; 23.6(4)]. Die Quasivollständigkeit lässt sich auch durch die Forderung "$\overline{B}^{\sigma(E^*,E)} \subset E'$ für alle beschränkten B aus E'" ausdrücken. Verschärft man diese Bedingung in geeigneter Weise, so erhält man duale Charakterisierungen von GN- und GM-Räumen. Dies soll jetzt geschehen:

6.9 DUALE CHARAKTERISIERUNG

a) Ein separierter l.k. Raum E ist genau dann ein GN-Raum, wenn er die Mackeytopologie trägt, und wenn für jede $\sigma(E',E)$-beschränkte Menge $B \subset E'$ gilt:
Die $\sigma(E',E)$-abgeschlossene lineare Hülle von B ist $\sigma(E',E)$-vollständig.

b) Ein separierter l.k. Raum E ist genau dann ein GM-Raum, wenn er die Mackeytopologie trägt, und wenn für jede Folge (B_n) von $\sigma(E',E)$-beschränkten Mengen $B_n \subset E'$ gilt

$$\overline{\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right]}^{\sigma(E^*,E)} \subset E' \quad .$$

BEWEIS Man überstze die Bedingungen von 6.8 wie folgt:

1° Ein separierter l.k. Raum besitzt eine stetige Norm (bzw. stetige l.k. Metrik) genau dann, wenn es im stetigen Dual eine schwach-totale (bzw. schwach-totale Folge von) gleichstetige(n) Menge(n) gibt (elementarer Beweis).

2° Ein separierter l.k. Raum trägt genau dann die feinste l.k. Topologie, wenn er ein Mackeyraum ist, und wenn das stetige Dual schwach vollständig ist ($\tau(E,E^*)$ ist die feinste l.k. Topologie).

3° Ein l.k. Raum ist genau dann tonneliert, wenn im stetigen Dual jede schwach-beschränkte Menge gleichstetig ist.

Ferner beachte man, dass bei der kanonischen Identifizierung des Duals eines separierten Quotienten E/Q mit der Polaren Q° in E' die E/Q-gleichstetigen Mengen in die in Q° gelegenen E-gleichstetigen Mengen übergehen [24; 22.1(2)b].

q. e. d.

Bevor wir die Theorie von GN- und GM-Räumen weitertreiben, geben wir mit Hilfe von 6.8 einige Beispiele von GN-Räumen.

Dagegen habe ich nicht feststellen können, ob es ausser den Räumen mit der feinsten l.k. Topologie (6.2 a) noch andere separierte GM-Räume gibt (vgl. 6.2 c). Einige Ansätze zur Auffindung eines nichttrivialen GM-Raums werden in §7 diskutiert.

6.10 BEISPIELE

a) Jeder normierbare GN-Raum ist endlich-dimensional, ebenso jeder metrisierbare GM-Raum.

b) Jeder Raum mit einer schwachen Topologie erfüllt die Norm-Quotientenbedingung von 6.8 . - Ein Raum mit einer schwachen Topologie ist also genau dann ein GN-Raum, wenn er tonneliert ist (6.8).

c) Ein separierter GM-Raum mit schwacher Topologie ist endlich-dimensional.

d) Die metrisierbaren GN-Räume sind (bis auf Isomorphie) genau die tonnelierten Teilräume von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

BEWEIS Teil a) folgt aus 6.8 und der Tatsache, dass die feinste l.k. Topologie nur auf endlich-dimensionalen Räumen metrisierbar ist [19; Problem 6 I].

Teil b) beruht darauf, dass sich eine schwache Topologie auf Quotienten [19; 17.13(ii)] und auf gröbere l.k. Topologien (folgt sofort aus [20; 1.2.]) vererbt, und dass ein unendlich-dimensionaler Raum mit schwacher Topologie nicht normierbar ist [24; Bemerkung nach 20.2(4)].

Bei Teil c) schliessen wir indirekt und betrachten einen dichten linearen Teilraum E von $\mathbb{K}^I$, wobei I unendlich ist. Wir wählen eine abzählbar unendliche Teilmenge $J \subset I$ und betrachten die kanonische Projektion $p : E \longrightarrow \mathbb{K}^J$. Auf dem Quotienten $E / \mathrm{Ker}(p)$ existiert daher eine stetige l.k. Metrik, ohne dass die Quotiententopologie die feinste l.k. Topologie ist; denn $E / \mathrm{Ker}(p)$ ist algebraisch isomorph zu dem in $\mathbb{K}^J$ dichten Teilraum $p(E)$, ist also ein unendlich-dimensionaler Raum mit schwacher Topologie (vgl. [15; 3.3, exercise 1 b , S.190]).

Bei d) ist wegen Teil b) nur noch zu zeigen, dass ein metrisierbarer GN-Raum E die schwache Topologie trägt. Sei U eine absolutkonvexe Nullumgebung. Da auf $E / (\bigcap_{\lambda>0} \lambda U)$ eine stetige Norm existiert (kanonisch), folgt, dass die Quotiententopologie die feinste l.k. Topologie ist. Aus Metrisierbarkeitsgründen [19; Problem 6 I] ist die Dimension des Quotienten

endlich - oder anders ausgedrückt: U einen Teilraum endlicher Kodimension. Da U beliebig war, ist nach [20; 1.2.] alles bewiesen.

q. e. d.

6.11 Die obigen Beispiele haben auch wieder Rückwirkungen auf die Theorie und zwar:

a) Nicht jeder tonnelierte Raum ist ein GN-Raum; vgl. 6.10 a .
b) Nicht jeder GN-Raum ist ein GM-Raum; vgl. 6.10 b und c .
c) In 6.8 ist die Norm-Quotientenbedingung unabhängig von der Tonneliertheit, d.h.: Es gibt tonnelierte Räume, die nicht die Norm-Quotientenbedingung erfüllen (siehe a)), und es gibt Räume, welche die Norm-Quotientenbedingung erfüllen, ohne deswegen tonneliert zu sein (vgl. 6.10 b).

Kein Beispiel habe ich für eine entsprechende Aussage über die Metrik-Quotientenbedingung.

6.12 KOMPLEMENTÄRRÄUME IN GM-RÄUMEN

Sei E ein l.k. Raum, der die Metrik-Quotientenbedingung erfüllt (vgl. 6.8), und (H_n) eine Folge linearer Teilräume von E , die einen metrisierbaren topologischen Komplementärraum besitzen.

Dann ist jeder algebraische Komplementärraum von $\bigcap \{ H_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ in E topologischer Komplementärraum.

Die Voraussetzungen sind erfüllt für einen GM-Raum E und eine Folge (H_n) abgeschlossener Hyperebenen von E .

BEWEIS Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei p_n eine stetige Projektion von E auf einen metrisierbaren linearen Teilraum M_n von E mit $H_n = \mathrm{Ker}(p_n)$. Mittels der stetigen Abbildung $g : E \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} M_n$, $g(x) = (p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ erhalten wir auf $E / \mathrm{Ker}(g)$ eine stetige l.k. Metrik. Nach Voraussetzung über E trägt $E / \mathrm{Ker}(g)$ die

feinste l.k. Topologie.

Wegen $\mathrm{Ker}(g) = \bigcap_1^\infty \mathrm{Ker}(p_n) = \bigcap_1^\infty H_n$ folgt die Behauptung.

q. e. d.

6.13 VERVOLLSTÄNDIGUNG

Es sei E ein topologischer Vektorraum und $F \subset E$ ein dichter linearer Teilraum. Ist F (in der Relativtopologie) ein GN-Raum (bzw. ein GM-Raum), so ist auch E ein GN-Raum (bzw. ein GM-Raum).

BEWEIS Da mit F auch E tonneliert ist [19; 18.7(v)], genügt es nach 6.8 zu zeigen, dass sich die Quotientenbedingung von F auf E vererbt. Dazu sei E/Q ein Quotient von E mit stetiger Norm (bzw. stetiger l.k. Metrik). Mittels der injektiven, kanonischen Abbildung $F/(F\cap Q) \longrightarrow E/Q$ bekommt man auf $F/(F\cap Q)$ eine stetige Norm (bzw. stetige l.k. Metrik). $F/(F\cap Q)$ trägt also nach Voraussetzung die feinste l.k. Topologie. Nach [7; III, §2.7, prop. 21] gilt - falls man das dortige H_o als abgeschlossen in G_o voraussetzt -, dass der vollständige Raum $F/(F\cap Q)$ topologisch isomorph ist zu einem dichten Teilraum des separierten Raums $E/\overline{F\cap Q}^E$ (vgl. auch [34; Lemma 1]). Der letztgenannte Raum trägt also die feinste l.k. Topologie. Aus der Abgeschlossenheit von Q folgt $\overline{F\cap Q}^E \subset Q$, so dass E/Q topologisch isomorph ist zu einem Quotienten von $E/\overline{F\cap Q}^E$ [7; III.2.7, Korollar zu Satz 2.2]. Somit trägt E/Q die feinste l.k. Topologie (folgt z.B. aus [19; Problem 6 I]), was zu zeigen war.

q. e. d.

Dieser Satz zeigt u.a.: Wenn es einen nichttrivialen GM-Raum gibt, dann gibt es einen vollständigen, nichttrivialen GM-Raum.

Ferner zeigt der Satz, wie sich die Aussage 6.10 c aus der Tatsache herleiten lässt, dass $\mathbb{K}^I$ für unendliches I kein GM-Raum ist (6.3).

In 6.4 haben wir gezeigt, dass jeder lineare Teilraum M eines Produkts $\prod_\mu E_\mu$ von GN-Räumen, der $\prod'_\mu E_\mu$ umfasst, ein GN-Raum ist. Jeder solche Raum M ist daher tonneliert (vgl. auch 6.6 c). Für $E_\mu = \mathbb{K}$ gilt nach 6.10 b auch die Umkehrung, d.h. jeder tonnelierte Teilraum von $\mathbb{K}^I$ ist ein GN-Raum.

Wir zeigen jetzt, dass die letzte Aussage nur davon abhängt, dass $\mathbb{K}^I$ ein GN-Raum ist. Die wesentliche Aussage von 6.4 ist daher, dass das Produkt von GN-Räumen ein GN-Raum ist.

6.14 TEILRÄUME

Ein linearer Teilraum eines GN-Raums (bzw. GM-Raums) ist genau dann ein GN-Raum (bzw. GM-Raum), wenn er tonneliert ist.

BEWEIS Wegen 6.8 genügt es (in der nichttrivialen Richtung) zu zeigen, dass sich die Quotientenbedingungen auf jeden linearen Teilraum vererben. Der Beweis beider Fälle verläuft gleich, so dass wir uns auf den metrisierbaren Fall beschränken.

Sei also (E,t) ein l.k. Raum, der die Metrik-Quotientenbedingung erfüllt. $M \subset (E,t)$ sei ein linearer Teilraum, der einen Quotienten M/N mit einer gröberen metrisierbaren l.k. Topologie s besitze. Zu zeigen ist, dass M/N die feinste l.k. Topologie trägt.

Als erstes nehmen wir $N = \{0\}$ an. Dies bedeutet keine Einschränkung, denn M/N ist ein Teilraum von $(E,t)/N$, und auf $(E,t)/N$ vererbt sich die Quotientenbedingung trivialerweise.

Sei $\{ U_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine s-Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen $t|M$-Nullumgebungen. Zu diesen wählen wir wie in [24; 19.4(2)] absolutkonvexe t-Umgebungen V_n in E mit $V_n \cap M = U_n$. Die von $\{ V_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ erzeugte l.k. Topologie ist halbmetrisierbar und gröber als t. Bezeichnet L den Nullraum dieser Topologie, so trägt nach Voraussetzung über (E,t) der Quotient $(E,t)/L$ die feinste l.k. Topologie. Wegen

$$M \cap L = M \cap \bigcap \{ \lambda V_n \mid \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N} \} = \cap \{ \lambda U_n \mid \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N} \} = \{0\}$$

ist die kanonische Abbildung $M \to E/L$ injektiv - und so ist $t|M$ die feinste l.k. Topologie auf M (vgl. [19; Problem 14 D]).

q. e. d.

Aus dem letzten Satz folgt wegen [39; theorem 3], dass insbesondere jeder abzählbar-kodimensionale lineare Teilraum eines GN-Raums (bzw. GM-Raums) von der gleichen Art ist.

Der Beweis von 6.14 legt die Frage nahe, ob die Quotientenbedingung aus 6.8 auch bei Bildung von Produkt- und Finaltopologien erhalten bleibt.

Für l.k. Finaltopologien fällt die Antwort positiv aus: Mittels der Transitivität der Bildung von l.k. Finaltopologien und durch Übergang zu injektiven Abbildungen führt man das Problem ohne Schwierigkeiten zurück auf den Spezialfall der Quotientenbildung. Hierfür ist die Behauptung trivialerweise richtig.

Bei Produktbildung muss man zwischen Norm und Metrik unterscheiden:

Die Metrik-Quotientenbedingung überträgt sich nicht; einfachstes Beispiel ist $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (6.8 und 6.3).

Die Norm-Quotientenbedingung vererbt sich dagegen auf Produkte: Denn besitzt $(\prod_I E_\mu)/N$ eine stetige Norm, so existiert nach 6.5 ein endliches $J \subset I$ mit $\prod_{I\setminus J} E_\mu \subset N$. Daher ist $(\prod_I E_\mu)/N$ topologisch isomorph zu einem Quotienten von $\prod_J E_\mu$, so dass das Ergebnis über Finaltopologien anwendbar ist.

6.15 GEGENBEISPIELE ZU TEILRÄUMEN

Man fragt sich natürlich, welche Teilräume von GN- oder GM-Räumen tonneliert sind. Für GM-Räume verweise ich auf 7.3 a . Bei GN-Räumen ist die Lage genauso schlecht wie bei den tonnelierten Räumen.

a) Wie man am Beispiel des Raums aller finiten Folgen in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sieht, sind nicht alle dichten Teilräume von GN-Räumen tonneliert.

b) Auch ein abgeschlossener linearer Teilraum eines GN-Raums ist nicht notwendig tonneliert: Dazu erinnere man sich an den

(vollständigen, nuklearen Montel-) Raum $\varphi\omega \oplus \omega\varphi$ mit dem nicht quasitonnelierten, abgeschlossenen linearen Teilraum H_2, $H_2 = \{ (x,-x) \mid x \in \varphi\varphi \}$ [24; 27.2, Kleindruck]; $\varphi\omega \oplus \omega\varphi$ ist nämlich ein GN-Raum nach 6.2 b und 6.4 .

c) Eine spezielle Klasse abgeschlossener linearer Teilräume von GN-Räumen bilden wegen 6.4 die projektiven Limiten von GN-Räumen. Doch auch hier treten nichttonnelierte Räume auf:

Um dies zu sehen, wenden wir ein in [33; 3.1 und 3.2 a] beschriebenes Verfahren an. Dort wird, von einem beliebigen unendlich-dimensionalen separierten Baire-Raum (E,t) ausgehend, eine aufsteigende Folge Bairescher l.k. Topologien t_n auf E konstruiert, deren Supremum s nicht tonneliert ist. Dabei ist jeder Raum (E,t_n) die topologisch direkte Summe zweier tonnelierter Teilräume von (E,t) . - Falls also (E,t) ein GN-Raum ist, so ist es auch jeder der Räume (E,t_n) (6.14 und 6.2 b). (E,s) leistet dann das Gewünschte.

Zur Realisierung nehme man $(E,t) = \mathbb{K}^I$ mit unendlichem I . Nimmt man speziell $I = \mathbb{N}$, so werden alle Topologien t_n separabel, metrisierbar, nuklear und Bairesch. Damit ist gezeigt:

> Der projektive Limes einer Folge von separablen, nuklearen, metrisierbaren, Baireschen GN-Räumen ist nicht notwendig ein GN-Raum, d.h. er ist nicht notwendig tonneliert.

6.16 EINBETTUNGSSATZ FÜR GN-RÄUME

Die separierten GN-Räume sind (bis auf Isomorphie) genau die tonnelierten Teilräume von Produkten von Räumen mit der feinsten l.k. Topologie.

BEWEIS Der eine Teil folgt aus 6.2 a, 6.4 und 6.14 .

Zum Beweis der Umkehrung überlegt man sich mühelos, dass die Topologie eines l.k. Raums (E,t) die Initialtopologie ist bzgl. aller Quotienten $(E,t) / \left(\bigcap_{\lambda>0} \lambda U \right)$ mit den zugehörigen

kanonischen Abbildungen; U durchläuft dabei eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen. Ein separierter l.k. Raum ist daher einbettbar in das Produkt obiger Quotienten.

Da diese Quotienten in natürlicher Weise eine stetige Norm besitzen, folgt wegen 6.8 die gewünschte Einbettung von separierten GN-Räumen.

q. e. d.

Durch eine einfache Zusatzüberlegung zum Beweis von 6.16 erhält man:

Die separierten vollständigen GN-Räume sind genau die tonnelierten projektiven Limiten von Räumen mit der feinsten l.k. Topologie.

Durch eine ähnliche Betrachtung wie beim Beweis von 6.16 erhält man, dass ein l.k. Raum E genau dann eine schwache Topologie trägt, wenn jeder Quotient von E mit einer stetigen Norm endlich-dimensional ist.

Ersetzt man daher in der Quotientenbedingung von 6.8 die Forderung "trägt die feinste l.k. Topologie" durch "ist endlich-dimensional" , so sind die auf diese Weise definierten speziellen GN- bzw. GM-Räume im Falle der Norm-Quotientenbedingung genau die tonnelierten Räume mit einer schwachen Topologie und im Fall der Metrik-Quotientenbedingung genau die l.k. Räume, deren assoziierter separierter Raum endlich-dimensional ist (vgl. 6.10 c).

§7 SPEZIELLE EIGENSCHAFTEN

Das wichtigste Ergebnis dieses Paragraphen ist die Tatsache, dass die abzählbar-dimensionalen linearen Teilräume eines GM-Raums tonneliert sind (7.3 a), und die unmittelbare Folgerung, dass die beschränkten Mengen eines separierten GM-Raums endlich-dimensional sind (7.3 b). Daher ist jeder GM-Raum ein Montel-Raum (7.3 d), und - von trivialen Fällen abgesehen - das Dual eines GM-Raums wegen 6.10 c kein GM-Raum (7.3 f).

Wir beginnen mit Bemerkungen zu analogen Fragestellungen für GN-Räume:

7.1 GN-RÄUME UND MONTEL-RÄUME

Der Einbettungssatz 6.16 besagt u.a., dass jeder separierte GN-Raum Teilraum eines geeigneten vollständigen Montel-Raums ist. Daher fallen in einem separierten GN-Raum die beschränkten mit den präkompakten, sowie die schwach-kompakten mit den kompakten Mengen zusammen (beachte [24; 18.4(4)]).

Ein separierter GN-Raum ist somit (genau dann) ein Montel-Raum, wenn er reflexiv oder schwach-quasivollständig (d.h. halbreflexiv) oder quasivollständig ist.

Insbesondere ist jeder vollständige GN-Raum ein Montel-Raum. Dagegen ist

weder ein vollständiger Montel-Raum notwendig ein GN-Raum (man nehme z.B. einen Fréchet-Montel-Raum, der nicht die schwache Topologie trägt [24; 31.5], und beachte 6.10 d),

noch muss ein Montel-Raum, der zugleich GN-Raum ist, vollständig sein (man nehme den schwachen, unvollständigen Montel-Raum von [5; §2] und beachte 6.10 b).

* * *

7.2 DUALRÄUME VON GN-RÄUMEN

Für einen GN-Raum E gilt :

a) Ist E vollständig, so ist $(E',\tau(E',E))$ ein GN-Raum.

b) $(E',\beta(E',E))$ ist ein Semi-Montel-Raum [15; 3.9.1.].

c) Jede $\sigma(E',E)$ - beschränkte Menge $B \subset E'$ ist relativ kompakt bzgl. der zu $\sigma(E',E)$ assoziierten tonnelierten Topologie r und es gilt $\overline{B}^{\sigma} = \overline{B}^{r}$.

BEWEIS Es genügt offenbar, E als separiert vorauszusetzen.

a) Wegen 6.16 können wir E als abgeschlossenen Teilraum eines l.k. Raums F der Form $F = \prod_{\nu \in A} \bigoplus_{\mu \in B_\nu} \mathbb{K}$ auffassen. Dann ist das Mackeydual von E isomorph zu $(F',\tau(F',F))/E^{\circ}$ (Polare in F') [24; 22.2(4)]. Da das Mackeydual von F isomorph ist zu einem Raum der Gestalt $\bigoplus_{\nu \in A} \prod_{\mu \in B_\nu} \mathbb{K}$ (z.B. [24; 22.5(3) und 22.5(4)]), folgt die Behauptung aus den bekannten Permanenzeigenschaften von GN-Räumen.

b) Folgt unmittelbar aus c) .

c) Aus 6.9 folgt, dass für jede $\sigma(E',E)$-beschränkte Menge $B \subset E'$ der Raum $H := \overline{[B]}^{\sigma(E',E)}$ schwach-vollständig ist, also insbesondere schwach-tonneliert. Hieraus folgt die Stetigkeit der Inklusion $(H,\sigma(H,H')) \longrightarrow (E',r)$. Dies bedeutet nichts anderes als $\sigma(E',E)\,|\,H = r|H$.

In elementarer Weise ergibt sich, dass die $\sigma(E',E)$ - abgeschlossene Hülle von B gleich der r-abgeschlossenen Hülle ist. Da $(H,r|H)$ ein Montel-Raum ist, liegt die r-Kompaktheit von $\overline{B}$ auf der Hand.

q. e. d.

Wie stark hängt 7.2 a von der Vollständigkeit ab?

Nun, eine notwendige Bedingung dafür, dass das Mackeydual eines GN-Raums E ein GN-Raum ist, ist die Halbreflexivität von E . Nach 7.1 trifft dies genau dann zu, wenn E ein Montel-Raum ist.

Ich habe nicht beweisen können, dass diese Bedingung auch

hinreichend ist. Auch mit Gegenbeispielen hat es nicht geklappt:

In Frage kommen nur unvollständige Montel-Räume. Je doch liefern alle mir bekannten derartigen Räume ([5; §2, 4] und [22; §5]) - die alle die schwache Topologie tragen, also GN-Rä sind (6.10 b) - kein Gegenbeispiel. Denn bei den ersten beiden ist auch die schwache Topologie des Dualraums tonneliert, und beim dritten Raum benutzt man die duale Charakterisierung 6.9 a eines GN-Raums; dabei schliesse man ähnlich wie beim Beweis der Montel--Raum-Eigenschaft, loc. cit. S.161, vorletzter Absatz.

Bei GM-Räumen liegen die zuletzt angerührten Dinge wesentlich einfacher:

7.3 SPEZIELLE EIGENSCHAFTEN VON GM-RÄUMEN

Für einen separierten GM-Raum E gilt:

a) Jeder abzählbar-dimensionale lineare Teilraum von E trägt die feinste l.k. Topologie.
b) Jede beschränkte Menge aus E ist endlich-dimensional.
c) Die assoziierte bornologische Topologie ist die feinste l.k. Topologie auf E .
d) E ist ein Montel-Raum, also insbesondere reflexiv und quasivollständig.
e) Auf E' stimmen die schwache und die starke Topologie überein.
f) Das Mackeydual von E ist ein GN-Raum, aber - von endlich--dimensionalem E abgesehen - kein GM-Raum.
g) Trägt E nicht die feinste l.k. Topologie, dann ist $(E',\sigma(E',E))$ ein unvollständiger Montel-Raum.

BEWEIS Wesentlich ist Teil a). Die Behauptungen b) bis e) sind triviale Folgerungen aus a) oder b). f) folgt aus e), 6.10 b und 6.10 c .

Zu g) : $(E',\sigma(E',E))$ ist ein unvollständiger Semi-Montel-Raum [15; 3.9.1.], da E ein separierter tonnelierter Raum ist, der nicht die feinste l.k. Topologie trägt. Tonneliert ist

$(E',\sigma(E',E))$ auf Grund der Eigenschaft b).

Zu a) : Die Beweisidee bei 6.14 war es, zu zeigen, dass sich die Quotientenbedingung aus 6.8 auf jeden linearen Teilraum vererbt. Existiert insbesondere auf einem linearen Teilraum von E eine stetige Norm (bzw. stetige l.k. Metrik), so trägt dieser die feinste l.k. Topologie. Nun erinnere man sich, dass auf jedem abzählbar-dimensionalen separierten l.k. Raum eine gröbere l.k. Metrik existiert (1.9 d) - und man hat das gewünschte Resultat.

q. e. d.

Dass die in 7.3 aufgeführten Eigenschaften nicht für GN-Räume gelten, sieht man am einfachsten an einer dichten Hyperebene von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (sie ist ein GN-Raum wegen 6.14).

Des weiteren ist die Eigenschaft von Teil a) nicht für einen GM-Raum hinreichend: Frau S. DIEROLF hat nämlich in anderem Zusammenhang einen tonnelierten Raum gefunden, dessen Topologie nicht die feinste l.k. ist, und für den Teil a) richtig ist. Dieses Beispiel ist jedoch nach 6.8 nicht einmal ein GN-Raum, da auf ihm eine stetige Norm existiert.

Besondere Aufmerksamkeit verdient Punkt g). Suggeriert er doch, unter den unvollständigen Montel-Räumen mit schwacher Topologie nachzusehen, ob deren Mackeydual ein GM-Raum ist. Bei den mir bekannten unvollständigen schwachen Montel-Räumen (siehe S.81 oben) ergibt sich auf diesem Weg kein Beispiel eines nichttrivialen GM-Raums:

Die beiden ersten vor 7.3 angeführten Beispiele bringen nichts wegen 6.10 c , da das Mackeydual gleich dem schwachen Dual ist.

Beim verbleibenden schwachen Montel-Raum E [22; §5] zeigt man, dass für $F := (E',\tau(E',E))$ die Bedingung 6.9 b für den Dualraum verletzt ist:

Als beschränkte Mengen in $F' = E$ nehmen wir einelementige, und zwar $B_n := \{ (e^o_{\alpha_n}, \varepsilon^1_{\alpha_n}, 0, 0, \dots) \}$, wobei die $e^o_{\alpha_n}$ paarweise verschiedene Elemente der vorgegebenen Basis $\{ e^o_\alpha \mid \alpha \}$ von $\omega_{o,o}$ sind; die $\varepsilon^1_{\alpha_n}$ sind durch die Konstruktion auf S.160 oben (loc. cit.) festgelegt.

Angenommen, $H := \overline{[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n]}^{\sigma(F',F)}$ ist schwach-vollständig, also topologisch isomorph zu einem $\mathbb{K}^I$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Für abzählbares I ist H ein metrisierbarer l.k. Raum. Also gibt es eine Folge (λ_n) positiver Zahlen, so dass $B := \bigcup_1^\infty \lambda_n B_n$ beschränkt ist [24; 29.1(5)]. Nach Lemma 2 von [22; §5] ist daher die Projektion von B auf die erste Koordinate endlich-dimensional, ein Widerspruch zur Wahl von $e^o_{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Für überabzählbares I würden in $F' = E \subset \prod_1^\infty \omega_k$ nichtmetrisierbare beschränkte Mengen existieren, was Lemma 2 (loc. cit.) widerspricht: Jede beschränkte Menge aus E ist nämlich enthalten in $\prod_1^\infty L_k$ mit gewissen endlich-dimensionalen linearen Teilräumen $L_k \subset \omega_k$.

In jedem Fall ergibt sich ein Widerspruch, womit alles gezeigt ist.

Die gerade im Anschluss an die Definition von H angestellten Überlegungen ergeben Teil b) des folgenden Satzes, dessen Teil a) wegen 6.9 trivial ist.

7.4 KRITERIUM FÜR GM-RÄUME

Für einen separierten GN-Raum E gilt:

a) E ist ein GM-Raum, wenn für jede Folge (B_n) beschränkter Mengen in $(E', \sigma(E',E))$ eine Folge (λ_n) positiver Zahlen existiert, so dass $\bigcup_1^\infty \lambda_n B_n$ beschränkt ist.

b) Ist jede beschränkte Menge in $(E', \sigma(E',E))$ metrisierbar (als topologischer Raum), dann gilt in a) auch die Umkehrung.

Wir befinden uns bei 7.4 a in einer ähnlichen Situation wie bei Punkt g) von 7.3, einschliesslich des negativen Ergebnisses:

1° Das klassische Beispiel von l.k. Räumen, deren beschränkte Mengen die in 7.4 a aufgeführte Eigenschaft haben (bei G.W. MACKEY heisst das die "first countability property" [25; S.182]) sind die metrisierbaren [24; 29.1(5)]. Es gilt jedoch:

Ein separierter GN-Raum E, dessen Mackeydual oder starkes Dual metrisierbar ist, ist abzählbar-dimensional und trägt daher die feinste l.k. Topologie (vgl. 1.9 d).

Beweis: Die stark beschränkten und die schwach beschränkten Mengen in E' sind die gleichen. Sie erfüllen also in jedem Fall die Voraussetzung von 7.4 a, so dass E ein GM-Raum ist. Aus 7.3 e folgern wir, dass das schwache Dual metrisierbar ist. Daher hat E als Dual eines schwach-metrisierbaren Raums abzählbare Dimension.

q. e. d.

Als Korollar notieren wir:

Ein GN-Raum, der zugleich (DF)-Raum ist, ist abzählbar-dimensional.

2° Bei MACKEY stehen noch zwei Beispiele von Räumen F, deren beschränkte Mengen die "erste Abzählbarkeitsbedingung" erfüllen [25; IV .4, example (2) und (7), S.204]. Man kann sich aber überlegen, dass es keinen GN-Raum E gibt, so dass $E' \cong F$ (algebraisch) und dass die beschränkten Mengen von F die $\sigma(E',E)$-beschränkten Mengen sind.

Wir wenden uns Teil b) von 7.4 zu, und fragen, welche GN-Räume die Voraussetzung erfüllen.

Man erhält folgendes überraschende Ergebnis:

7.5 NUKLEARE GN-RÄUME

Für einen separierten GN-Raum E sind äquivalent:

a) E ist s-nuklear [31; 11.2.1.].
b) E ist nuklear [31; 4.1.2.].
c) E ist ein Schwartz-Raum [12; §3.4, def. 5, S.117].
d) Jede beschränkte Menge in $(E',\sigma(E',E))$ ist metrisierbar (als topologischer Raum).
e) Jede Nullumgebung von E enthält einen linearen Teilraum abzählbarer Kodimension.
f) E ist topologisch isomorph zu einem Teilraum eines φ^I, φ die l.k. direkte Summe $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}$.

BEWEIS Es gilt allgemein: Jeder s-nukleare Raum ist nuklear [31; 11.2.2.] und jeder nukleare Raum ist ein Schwartz-Raum [13; II.2.1, cor. 1, S.38].

Weiter gilt in einem Schwartz-Raum F: Für jede gleichstetige Menge B von F' existiert eine Nullumgebung V in F, so dass B relativkompakt ist im (kanonisch) normierten Raum $F'(V^\circ)$ [15; 3.15.5.]. Daher stimmen auf B die Normtopologie und $\sigma(F',F)$ überein. - Da ein GN-Raum tonneliert ist, ist damit gezeigt, dass d) aus c) folgt.

Wir schliessen jetzt von d) auf a):

Sei U eine Nullumgebung in E, U ohne Einschränkung absolutkonvex und abgeschlossen. Dann ist nach 6.9 der Teilraum $H := [U^\circ]$ von $(E',\sigma(E',E))$ schwach-vollständig. Wegen der Voraussetzung d) ist H metrisierbar, da in einem $\mathbb{K}^I$ mit überabzählbarem I nichtmetrisierbare beschränkte Mengen existieren. Damit ist H der Dualraum eines abzählbar-dimensionalen Raums L, L versehen mit der feinsten l.k. Topologie. Ein solcher Raum L ist aber nach [31; Theorem 11.2.2.] s-nuklear, dann L ist nuklear [31; 5.2.2.] und trivialerweise dualmetrisch [31; 0.7.5.]. Nach Definition von s-nuklear existiert somit in H eine absolutkonvexe, abgeschlossene beschränkte Menge B, die U° absorbiert, und für welche die kanonische Abbildung von $L'(U^\circ)$ in $L'(B)$ vom Typus s ist.

Nun ist $L'(U^\circ) = E'(U^\circ)$, $L'(B) = E'(B)$, und $V := B^\circ$ (Polare in E) ist eine Nullumgebung in E , die von $U^{\circ\circ} = U$ absorbiert wird, und für die die kanonische Abbildung $E'(U^\circ) \longrightarrow E'(V^\circ)$ vom Typus s ist. Damit ist a) bewiesen.

Die restlichen Äquivalenzen zeigen wir durch $b \to e \to f \to b$. Sei E ein nuklearer GN-Raum. Nach [31; 5.1.3.] ist jeder Quotient nuklear, insbesondere jeder Quotient $E / \bigcup_{\lambda>0} \lambda U$, U eine absolutkonvexe Nullumgebung. Diese Quotienten tragen aber die feinste l.k. Topologie (6.8), so dass sie abzählbare Dimension haben [13; II.2.1, remarque 7, S.42] (vgl. Punkt d) von 7.5). Damit ist e) bewiesen.

Dass aus e) Teil f) folgt, sieht man wie bei 6.16 .

Schliesslich folgt b) aus f) , da mit φ auch φ^I und jeder lineare Teilraum davon nuklear ist [31; 5.2.2., 5.2.1. und 5.1.1.].

q. e. d.

Der Satz 7.4 lässt sich jetzt neu formulieren:

KOROLLAR

Ein nuklearer GN-Raum E ist genau dann ein GM-Raum, wenn es für jede Folge (B_n) beschränkter Mengen in $(E', \sigma(E',E))$ eine Folge positiver Zahlen λ_n gibt, so dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n B_n$ beschränkt ist.

7.6 TRIVIALE GM-RÄUME

Ein separierter GM-Raum trägt in folgenden Fällen die feinste l.k. Topologie:

a) E trägt die schwache Topologie oder ist bornologisch.

b) E ist topologisch isomorph zu einem linearen Teilraum von $\prod_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{i\in I_n} \mathbb{K}$ oder $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i\in I_n} \mathbb{K}$, I_n beliebig.

BEWEIS a) Siehe 6.10 c und 7.3 c .

b) Der erste Fall ist wegen 6.8 ziemlich trivial, da jeder Faktor eine stetige Norm besitzt. Im zweiten Fall ist $E \subset \bigoplus_1^\infty F_n$, F_n separiert und schwach-vollständig, und zwar E ohne Einschränkung abgeschlossen (6.13). Dann ist $E \cap \bigoplus_1^k F_n$ abgeschlossen in $\bigoplus_1^k F_n$ und somit ein minimal-l.k. Teilraum von E . Wegen 6.14 ist $E \cap \bigoplus_1^k F_n$ ein GM-Raum und da er die schwache Topologie trägt, ist seine Dimension endlich (6.10 c). Daher ist (der tonnelierte Raum) E abzählbar-dimensional und trägt deshalb die feinste l.k. Topologie (vgl. 1.9 d).

q. e. d.

Ein weiterer Fall, in dem ein separierter GM-Raum E die feinste l.k. Topologie trägt, ist der, dass die Kodimension von E' in E^* abzählbar ist. Dies ergibt sich aus 7.3 g und aus folgendem noch nicht veröffentlichten Resultat von Frau DIEROLF :

"Ein echter, dichter, abzählbar-kodimensionaler linearer Teilraum eines $\mathbb{K}^I$ ist nicht semi-reflexiv."

Interessant im Zusammenhang mit dem Beweis von Teil b) ist :

Ein GN-Raum (E,t) ist genau dann topologisch isomorph zu einem Teilraum von $\prod_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{i\in I_n} \mathbb{K}$, I_n beliebig, wenn es eine solche stetige l.k. Metrik s auf (E,t) gibt, dass die assoziierten linearen Topologien von s und t (vgl. S.28 oben) übereinstimmen. (Beweis über die Standardeinbettung, vgl. 6.16 .)

Zum Abschluss des Paragraphen zeigen wir, dass bei Folgenräumen nicht so leicht nichttriviale GM-Räume zu finden sind.

7.7 GM-RÄUME UND FOLGENRÄUME

1. Es sei λ ein Folgenraum, der φ umfasst; λ^α sei sein α-Dual (siehe [24; 30.1]). Dann gilt:

   a) Ist $(\lambda^\alpha, \beta(\lambda^\alpha, \lambda))$ ein GM-Raum, so gilt $\lambda^\alpha = \varphi$.

   b) Ist λ normal und $(\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\alpha))$ ein GM-Raum, so ist $\lambda = \varphi$.

   c) Ist $(\lambda, \tau(\lambda, \lambda^\alpha))$ ein GM-Raum, so gilt $\lambda = \varphi$.

   Die Topologie ist dann jeweils die feinste l.k. (vgl. 1.9 d).

BEWEIS Sei $N(x)$ die normale Hülle eines Vektors x aus ω .
a) Aus dem Beweis von [24; 30.2(4)] ist ersichtlich, dass $N(x)$ $\sigma(\lambda^\alpha, \lambda)$-kompakt ist für alle $x \in \lambda^\alpha$. Ferner ist $N(x)$ absolutkonvex, so dass $N(x)$ $\beta(\lambda^\alpha, \lambda)$-beschränkt ist. Wegen 7.3 b ist $N(x)$ endlich-dimensional. Da in $N(x)$ alle endlichen Abschnitte von x liegen, folgt hieraus, dass x ein finiter Vektor ist.
b) Sei $x \in \lambda$. Wegen $\lambda \subset \lambda^{\alpha\alpha}$ folgt wie in a) , dass $N(x)$ $\sigma(\lambda^{\alpha\alpha}, \lambda^\alpha)$-kompakt ist. Weil λ normal ist, liegt $N(x)$ in λ und ist daher $\sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$-kompakt. Jetzt schliesse man wie in a) .
c) Nach [24; 30.5(8)] konvergieren die n-ten Abschnitte x_n eines $x \in \lambda$ gegen x in der normalen Topologie t . Daher ist $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ t-beschränkt und auch $\tau(\lambda, \lambda^\alpha)$-beschränkt, da t eine Topologie des dualen Paars $(\lambda, \lambda^\alpha)$ ist [24; 30.2(4)]. Die Behauptung ergibt sich nun wie oben.

q. e. d.

2. Ist λ ein reeller Folgenraum, der φ umfasst, dann gelten für das β-Dual λ^β [24; 30.10] :

   a) Ist $(\lambda^\beta, \beta(\lambda^\beta, \lambda))$ ein GM-Raum, so ist $\lambda^\beta = \varphi$.

   b) Ist λ seminormal [23; §3, S.331] und $(\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\beta))$ ein GM-Raum, so gilt $\lambda = \varphi$.

   Die Topologie ist dann jeweils die feinste l.k. .

BEWEIS Man betrachtet wieder die Menge der endlichen Abschnitte eines Vektors $x \in \omega$ und überlegt sich, dass sie in der semi-

normalen Hülle $SN(x)$ von x [23; S.331] enthalten ist. Das Lemma 3.2 von loc. cit., S.332 gibt die Beschränktheit von $SN(x)$ bzgl. $\beta(\lambda,\lambda^{\beta})$ bei b) und bzgl. $\beta(\lambda^{\beta},\lambda^{\beta\beta})$ bei a) (man beachte, dass λ^{β} nach S.331 seminormal ist). Wegen $\beta(\lambda^{\beta},\lambda^{\beta\beta}) \geq \beta(\lambda^{\beta},\lambda)$ erhält man in beiden Fällen mit dem gleichen Schluss wie bei 1.a) die Behauptung.

q. e. d.

3. Bei den verallgemeinerten Folgenräumen von N. PHUONG-CAC [30] erhält man mit ähnlichen Schlüssen wie bei 1. (man beachte loc. cit., prop. 3 und Zeile 7 - 11 , S.136) :

a) Ist Λ perfekt und $(\Lambda^{\times},\beta(\Lambda^{\times},\Lambda))$ ein GM-Raum, so ist $(\Lambda^{\times},\beta(\Lambda^{\times},\Lambda)) = \bigoplus_{1}^{\infty} (E',\beta(E',E))$, wobei (E,E') das den Räumen Λ, $\Lambda^{\times}$ zugrunde liegende duale Paar ist. Insbesondere ist $(E',\beta(E',E))$ ein GM-Raum (vgl. 6.2 b).

b) Ist Λ normal und $(\Lambda,\beta(\Lambda,\Lambda^{\times}))$ ein GM-Raum, so gilt $(\Lambda,\beta(\Lambda,\Lambda^{\times})) = \bigoplus_{1}^{\infty} (E,\beta(E,E'))$ und $(E,\beta(E,E'))$ ist ein GM-Raum.

c) Ist $(\Lambda,\tau(\Lambda,\Lambda^{\times}))$ ein GM-Raum, so ist $(E,\tau(E,E'))$ ein GM-Raum und es gilt $(\Lambda,\tau(\Lambda,\Lambda^{\times})) = \bigoplus_{1}^{\infty} (E,\tau(E,E'))$.

In den aufgeführten Fällen erhält man also höchstens dann nichttriviale GM-Räume, wenn die jeweiligen Ausgangsräume nichttriviale GM-Räume sind. Das Problem ist hier nur verschoben.

§8 EINE VERWANDTE RAUMKLASSE

So wie wir in §6 die GN- und GM-Räume aus der Mahowald-Charakterisierung von tonnelierten Räumen [26; 2.2.] erhalten haben, wird jetzt die Mahowald-Charakterisierung von quasitonnelierten Räumen [26; 3.1.] benutzt, um zu folgender Klasse l.k. Räume zu kommen (vgl. Einleitung):

8.1 DEFINITION

Ein l.k. Raum E heisst BGN-Raum (bzw. BGM-Raum), wenn jede beschränkte, g-abgeschlossene lineare Abbildung von E in einen normierbaren (bzw. metrisierbaren) l.k. Raum stetig ist [1]).

Aus der Definition folgt sofort, dass jeder bornologische Raum ein BGM-Raum ist, dass jeder BGM-Raum ein BGN-Raum ist, und wegen loc. cit. 3.1., dass jeder BGN-Raum quasitonneliert ist. Ferner ist ein GN-Raum ein BGN-Raum, und ein GM-Raum ein BGM-Raum.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die gerade definierten Räume im Vergleich zu den bekannten Räumen verhalten.

8.2 ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN

Sämtliche in 6.2 aufgeführten Punkte gelten sinngemäss; man ersetze "tonneliert" durch "quasitonneliert" und "Räume mit der feinsten l.k. Topologie" durch "bornologische Räume" (vgl. in diesem Zusammenhang auch 6.8 mit 8.6).

---

[1]) B steht für "beschränkt".

Analog in Aussage und Beweis gilt für BGN-Räume der Satz 6.4 über Produkte, da die Einschränkung einer beschränkten linearen Abbildung wieder beschränkt ist (vgl. auch 6.7 c).

Mit einem der neuen Situation angepassten Lemma, das die Rolle von 6.5 übernimmt, können wir noch mehr Teilräume eines Produkts von BGN-Räumen als BGN-Räume erkennen.

8.3 LEMMA

Gegeben sei eine Familie $(E_\mu)_{\mu\in I}$ von topologischen Vektorräumen und ein linearer Teilraum M von $\prod_{\mu\in I} E_\mu$. Weiter sei $f : M \to F$ eine beschränkte lineare Abbildung in einen topologischen Vektorraum F .

Dann gibt es zu jeder Nullumgebung V in F ein endliches $J \subset I$ mit $f((\bigoplus_{I\setminus J} E_\mu) \cap M) \subset V$ [1] .

BEWEIS Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann konstruiert man, ausgehend von $J = \emptyset$, eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\bigoplus_I E_\mu) \cap M$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(x^{(n)}) \notin V$ und $\{ \mu \in I \mid x_\mu^{(n+1)} \neq 0 \} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \{ \mu \in I \mid x_\mu^{(i)} \neq 0 \}) = \emptyset$.
Die Folge $(nx^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann eine beschränkte Folge in M, deren Bild nicht beschränkt ist - Widerspruch.

q. e. d.

8.4 PRODUKTE VON BGN-RÄUMEN

Es sei $(E_\mu)_{\mu\in I}$ eine Familie von BGN-Räumen. Dann ist jeder lineare Teilraum M von $\prod_{\mu\in I} E_\mu$, der $\bigoplus_{\mu\in I} E_\mu$ umfasst, ein BGN-Raum.

BEWEIS Sei F ein normierter Raum mit Einheitskugel V und $f : M \to F$ linear, beschränkt und g-abgeschlossen. Nach 8.3

[1] $\bigoplus_{\mu\in H} E_\mu$ werde für $H \subset I$ als Teilraum von $\bigoplus_{\mu\in H} E_\mu$ aufgefasst.

existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit

$$\bigoplus_{I \setminus J} E_\mu = (\bigoplus_{I \setminus J} E_\mu) \cap M \subset \bigcap_{\lambda > 0} \lambda f^{-1}(V) = f^{-1}(0) .$$

Da der Kern einer g-abgeschlossenen linearen Abbildung abgeschlossen ist, gilt $(\prod_{I \setminus J} E_\mu) \cap M \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Die Stetigkeit von f folgt nun wie bei 6.4 .

q. e. d.

Ein Raum mit schwacher Topologie, die nicht quasitonneliert ist (z.B. die zu einem unendlich-dimensionalen normierten Raum assoziierte schwache Topologie), zeigt, dass im obigen Satz selbst für $E_\mu = \mathbb{K}$ die Voraussetzung $M \supset \bigoplus_\mu E_\mu$ nicht überflüssig ist.

Beginnt man im Beweis von 8.4 mit einem Banachraum F statt mit einem normierten Raum F und beachtet man, dass ein endliches Produkt von quasitonnelierten Räumen quasitonneliert ist, so erhält man aus der Mahowaldschen Charakterisierung quasitonnelierter Räume [26; 3.1.] :

> Jeder lineare Teilraum eines topologischen Produkts von quasitonnelierten Räumen E_μ , der $\bigoplus_{\mu \in I} E_\mu$ umfasst, ist quasitonneliert.

8.5 PRODUKTE VON BGM-RÄUMEN

Ein linearer Teilraum M eines Produkts $\prod_{\mu \in I} E_\mu$ von BGM-Räumen ist ein BGM-Raum, falls er

zwischen $\bigoplus_{\mu \in I} E_\mu$ und $\prod'_{\mu \in I} E_\mu$ (vgl. 5.1)

oder zwischen $\prod'_{\mu \in I} E_\mu$ und $\prod_{\mu \in I} E_\mu$ liegt.

BEWEIS Sei $f : M \to F$ g-abgeschlossen, beschränkt, linear und F ein metrisierbarer l.k. Raum. Wir unterscheiden die Fälle:

a) $M = \bigoplus_{\mu \in I} E_\mu$. Gegeben sei eine Nullumgebung V in F . Dazu existiert nach 8.3 ein endliches $J \subset I$, so dass $f(\bigoplus_{I \setminus J} E_\mu) \subset V$.

Da ein endliches Produkt von BGM-Räumen ein BGM-Raum ist, existiert zu V eine Nullumgebung W von $\bigoplus_{\mu\in J} E_\mu$ mit $f(W) \subset V$. Da $\bigoplus_{I\setminus J} E_\mu + W$ eine Nullumgebung in $\bigoplus_{\mu\in I} E_\mu$ ist, folgt die Stetigkeit von f aus $f(\bigoplus_{I\setminus J} E_\mu + W) \subset V + V$.

b) $\bigoplus_\mu E_\mu \subset M \subset \prod'_\mu E_\mu$. Man sieht sofort, dass $\bigoplus_\mu E_\mu$ ein lokaldichter Teilraum von M ist. Dass M ein BGM-Raum ist, sieht man jetzt wegen a) mit einem analogen Schluss wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 auf S.36.

c) $\prod'_\mu E_\mu \subset M \subset \prod_\mu E_\mu$. Da F eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt, erhalten wir nach 8.3 eine abzählbare Menge $J \subset I$ mit $\bigoplus_{I\setminus J} E_\mu \subset \mathrm{Ker}(f)$. Hieraus folgt $\prod_{I\setminus J} E_\mu \cap M \subset \mathrm{Ker}(f)$, da der Kern einer g-abgeschlossenen linearen Abbildung abgeschlossen ist. Die Stetigkeit von f ergibt sich jetzt wieder wie bei 6.4, wenn man weiss, dass abzählbare Produkte von BGM-Räumen BGM-Räume sind. Dies wird nun bewiesen:

d) $I = \mathbb{N}$ und $M = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$. Die Beweisidee stammt von [2; 2.1]. Sei V eine Nullumgebung in F. Wir behaupten, dass es ein $i\in\mathbb{N}$ gibt mit $f(\prod_{n=i+1}^{\infty} E_n) \subset V$.

Angenommen, das wäre falsch. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$, so dass $f(x_i) \notin V$ und $x_i \in \prod_{n=i+1}^{\infty} E_n$. Man überlegt sich sofort, dass die Folge $(ix_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit nichtbeschränktem Bild ist - Widerspruch.

Für den Rest des Beweises verfahre man wie bei a).

q. e. d.

Es ist falsch, dass jeder lineare Teilraum M eines Produkts von BGM-Räumen E_μ, der $\bigoplus_\mu E_\mu$ umfasst, ein BGM-Raum ist.

Ein einfaches Beispiel ist gegeben durch eine überabzählbare Indexmenge I, $E_\mu := \mathbb{K}$ und $M := \bigoplus_\mu E_\mu + [(1)]$, $(1) : I \to \mathbb{K}$ die konstante Abbildung mit Wert 1. - Um zu sehen, dass M kein BGM-Raum ist, wählen wir eine abzählbar-unendliche Teilmenge $J \subset I$ und betrachten die Abbildung $M \longrightarrow \mathbb{K}^{(J)}$, $(m_\mu)_{\mu\in I} + \lambda(1) \longmapsto$ $\longmapsto (m_\mu)_{\mu\in J}$. Sie ist eine unstetige, beschränkte, g-abgeschlos-

sene lineare Abbildung von M in einen metrisierbaren l.k. Raum. Dies ergibt sich als Spezialfall von 8.8 , wenn man dort als Indexmenge $I \setminus J \cup \{J\}$ und als ausgezeichneten Index J nimmt, mit $H_J := \mathbb{K}^{(J)}$ und sonst $E_\mu := H_\mu := \mathbb{K}$.

Aus dem Teil c) des Beweises ergibt sich noch folgende Aussage über ein beliebiges Produkt bornologischer Räume:

Sei $(E_\mu)_{\mu \in I}$ eine Familie bornologischer Räume. Dann ist jede beschränkte lineare Abbildung von $\prod_\mu E_\mu$ in einen separierten l.k. Raum F stetig, falls ihr Kern abgeschlossen ist und F eine Nullumgebungsbasis besitzt, deren Mächtigkeit kleiner ist als die kleinste stark unerreichbare Kardinalzahl [24; 28.8(6)].

Als nächstes beweisen wir das Analogon zu 6.8 . Dazu führen wir die Bezeichnung $t^\times$ für die assoziierte bornologische Topologie einer l.k. Topologie t ein.

8.6 INTERNE BESCHREIBUNG

Ein l.k. Raum (E,t) ist genau dann ein BGN-Raum (bzw. ein BGM-Raum), wenn er quasitonneliert ist und folgende Quotientenbedingung erfüllt:

Für jeden Quotienten $(E,t)/Q$ mit stetiger Norm (bzw. mit stetiger l.k. Metrik) gilt $t/Q = t^\times/Q$.

BEWEIS Wir führen den Beweis nur für BGN-Räume aus; für BGM-Räume geht er analog.

a) Sei (E,t) ein BGN-Raum. Die Quasitonneliertheit von t ist in 8.2 enthalten. Sei nun E/Q ein Quotient mit der stetigen Norm p . Angenommen, $t/Q \neq t^\times/Q$. Dann gibt es eine $t^\times/Q$ - stetige Seminorm q , die nicht t/Q - stetig ist. Daher ist die kanonische Abbildung $E \longrightarrow E/Q$ bzgl. t und $p+q$ g-abgeschlossen und unstetig; ferner beschränkt, da sie sowohl bzgl. $t^\times$ und p

als auch bzgl. $t^\times$ und q stetig ist. Weil $p+q$ eine Norm ist, haben wir einen Widerspruch zur Definition eines BGN-Raums.

b) In der anderen Richtung haben wir die Stetigkeit jeder g-abgeschlossenen, beschränkten linearen Abbildung $f : (E,t) \longrightarrow F$ in einen normierten Raum F zu zeigen. Dazu reicht es wegen der vorausgesetzten Quotientenbedingung, auf $(E,t)/\mathrm{Ker}(f)$ eine stetige Norm zu konstruieren; denn die Beschränktheit von f ist äquivalent mit der Stetigkeit von $(E,t^\times)/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow F$ (kanonische Abbildung), und Stetigkeit von f ist äquivalent zur Stetigkeit von $(E,t)/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow F$.

Sei also B die Einheitskugel in F . Wegen der Graphenabgeschlossenheit von f ist die zu f gehörige Bijektion $g : f(E) \longrightarrow E/\mathrm{Ker}(f)$ g-abgeschlossen. Mit einer ähnlichen Überlegung wie im Teil b) des Beweises von 6.8 (S.70) folgt hieraus, dass die Menge $A := \overline{g(B)}$ eine Norm auf $E/\mathrm{Ker}(f)$ erzeugt. Sie ist gröber als $t/\mathrm{Ker}(f)$, denn das kanonische Urbild von A in E umfasst (die t-bornivore Menge) $f^{-1}(B)$ und ist daher eine t-bornivore t-Tonne und somit wegen der vorausgesetzten Quasitonneliertheit von (E,t) eine t-Nullumgebung.

q. e. d.

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Kriterium ist (vgl. 6.10 b):

8.7 SCHWACHE BGN-RÄUME

Ein l.k. Raum, der die schwache Topologie trägt, ist genau dann ein BGN-Raum, wenn er quasitonneliert ist.

Ein Raum mit schwacher Topologie ist jedoch nicht notwendig ein BGM-Raum, wenn er quasitonneliert ist. Dies zeigt das Beispiel auf S.93 unten. Der dortige Raum ist auf Grund der Bemerkung auf S.92 Mitte quasitonneliert.

Die Ähnlichkeiten zwischen BGN- bzw. BGM-Räumen und den in §6 studierten GN- bzw. GM-Räumen sind mit dem Resultat 8.7 beendet.

Bei den GN- und GM-Räumen konnten wir aus der internen Beschreibung schliessen, dass jeder dichte lineare Oberraum eines GN- bzw. GM-Raums von der gleichen Art ist.

Bei den BGN- und BGM-Räumen ist die Situation nicht ganz geklärt:

1° Mit einem analogen Schluss wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 auf S.36 zeigt man, dass lokaldichte lineare Oberräume von BGN- bzw. BGM-Räumen wieder BGN- bzw. BGM-Räume sind.

2° Für dichte, nicht lokaldichte Oberräume ist eine entsprechende Aussage falsch, sogar für Kodimension eins:

Für BGM-Räume kann man wieder das Beispiel auf S.93 unten nehmen, mit $\bigoplus_{\mu} \mathbb{K}$ als dichten Teilraum, der ein BGM-Raum ist.

Für BGN-Räume wähle man im anschliessenden Lemma zu $I := \mathbb{R}$ tonnelierte normierte Räume E_μ, die eine dichte Hyperebene H_μ besitzen. Für ein geeignetes $b \in \prod_{\mu} E_\mu$ ist dann wegen 8.8 (alle H_μ sind normiert) $\prod'_I H_\mu + [b]$ kein BGN-Raum - also auch kein BGM-Raum, obwohl $\prod'_I H_\mu$ bornologisch (vgl. 5.1, Hilfssatz) - also ein BGN- und BGM-Raum ist.

Dieses Beispiel ist tonneliert nach 6.6 c, da Hyperebenen von tonnelierten Räumen tonneliert sind. Für BGM-Räume ist dies eine Verschärfung gegenüber dem obigen Beispiel.

3° Offen ist, ob die vollständige Hülle eines BGN-Raums bzw. BGM-Raums von der gleichen Art ist.

Was man wegen 1° leicht mittels transfiniter Induktion sieht, ist, dass die lokalvollständige Hülle eines BGN- bzw. BGM-Raums ein BGN- bzw. BGM-Raum ist (vgl. die analoge Aussage über bornologische Räume bei [23; S.323]).

8.8 LEMMA

Es sei $(E_\mu)_{\mu \in I}$ eine überabzählbare Familie von separierten topologischen Vektorräumen und $(H_\mu)_{\mu \in I}$ eine Familie von dichten linearen Teilräumen von E_μ. Es existiere ein Punkt $b = (b_\mu)$

aus $\prod_\mu E_\mu$ mit überabzählbar vielen von Null verschieden Koordinaten, so dass für einen Index $\nu \in I$ gilt $b_\nu \notin H_\nu$.

Für jeden linearen Teilraum M von $\prod_\mu E_\mu$ zwischen $\bigoplus_\mu H_\mu$ und $\prod'_\mu H_\mu$ definiert dann $(m_\mu)_{\mu\in I} + \lambda b \longmapsto m_\nu$ eine beschränkte, unstetige, g-abgeschlossene lineare Abbildung $f : M + [b] \longrightarrow H_\nu$.

BEWEIS a) f ist wegen $b \in M$ wohldefiniert und linear.

b) Zum Nachweis der Beschränktheit zeigen wir, dass f folgenstetig ist. Dazu geben wir eine Nullfolge $(m_k + \lambda_k b)_{k\in\mathbb{N}}$ vor. Weil alle Vektoren m_k in einem abzählbaren Teilprodukt von $\prod_\mu E_\mu$ liegen, ergeben die Separiertheit aller E_μ und die Überabzählbarkeit von $\{ \mu \in I \mid b_\mu \neq 0 \}$, dass $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert. Somit ist $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und erst recht deren kanonische Projektion auf die ν-te Koordinate. Dies ist aber die Bildfolge $(f(m_k + \lambda_k b))_{k\in\mathbb{N}}$.

c) Die Unstetigkeit von f ergibt sich so: M ist ein dichter Teilraum von $M + [b]$, da H_μ dicht in E_μ ist, $\mu \in I$, und $\bigoplus_\mu H_\mu \subset M$. Daher gibt es ein gegen b konvergentes Netz $(m_\alpha)_\alpha$ aus M . Dessen Bildnetz $(f(m_\alpha))_\alpha$ konvergiert aber gegen b_ν , das von $f(b) = 0$ verschieden ist, ein Widerspruch wegen der Separiertheit von E_ν .

d) Zur Graphenabgeschlossenheit von f sei $(m_\alpha + \lambda_\alpha b)_\alpha$ ein gegen Null konvergentes Netz, so dass $(f(m_\alpha + \lambda_\alpha b))_\alpha$ gegen ein $y \in H_\nu$ konvergiert. Aus der Stetigkeit der ν-ten Projektion folgt die Konvergenz von $(\lambda_\alpha b_\nu)_\alpha$ gegen $-y$. Weil E_ν separiert ist, existiert ein $\lambda \in \mathbb{K}$, so dass $\lambda b_\nu = -y$. Dies ist wegen $b_\nu \notin H_\nu$ nur für $\lambda = 0$ möglich. Folglich ist $y = 0$, was zu zeigen war.

q. e. d.

Als nächstes befassen wir uns mit dem Teilraumproblem. Bei den GN- und GM-Räumen vererbte sich die Quotientenbedingung aus 6.8 auf jeden linearen Teilraum, so dass wegen 6.8 genau die tonnelierten Teilräume von GN- bzw. GM-Räumen vom selben Typ

sind (6.14). Die durch 8.6 nahegelegte Vermutung, dass bei BGN- und BGM-Räumen eine entsprechende Aussage für quasitonnelierte Teilräume gilt, erweist sich als falsch.

Als Beispiele hierfür mögen die in Bemerkung 2° auf S.96 angeführten Räume dienen; die jeweiligen Oberräume $\prod_{\mathbb{R}} E_\mu$ sind sogar bornologisch. Beim zweiten Beispiel ist der betreffende Teilraum sogar tonneliert.

Die Gegenbeispiele zum Teilraumproblem verbessern sich, wenn man zusätzlich verlangt, dass der Ausgangsraum bei "BGN" tonneliert und bei "BGM" ein GN-Raum sein soll. Dies ist realisierbar:

8.9 GEGENBEISPIELE ZU TEILRÄUMEN

a) Es existiert ein separierter, tonnelierter bornologischer Raum E - E ist also ein BGN-Raum - mit einem tonnelierten Teilraum F, der kein BGN-Raum ist.

b) Es gibt einen separierten, bornologischen GN-Raum E - E ist also ein BGM-Raum - mit einem tonnelierten Teilraum F, der kein BGM-Raum ist.

BEWEIS a) Man nehme das zweite Beispiel der Bemerkung 2° auf S.96 und setze $E := \prod_{\mathbb{R}} E_\mu$ und $F := \prod'_{\mathbb{R}} H_\mu + [b]$.

b) Analog zum Beispiel von a) wende man 8.8 an auf $I := \mathbb{R}$, $E_\mu := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und dichte Hyperebenen H_μ von E_μ. Die Tonnelierthheit von $F := \prod'_{\mathbb{R}} H_\mu + [b]$ ($b \in \prod_{\mathbb{R}} E_\mu$ geeignet nach 8.8 gewählt) wird wie bei a) begründet - siehe S.96, Bemerkung 2°. Dass $E := \prod_{\mathbb{R}} E_\mu$ ein GN-Raum ist, folgt aus 6.4.

q. e. d.

Das im Zusammenhang mit der Fragestellung zu 8.9 speziellere Problem, ob jede Hyperebene eines BGN- bzw. BGM-Raums vom gleichen Typ ist, ist nicht gelöst ("spezieller", da jede Hyperebene eines quasitonnelierten Raums nach [38] quasitonneliert ist).

Die Eigenschaft "bornologisch" vererbt sich bekanntlich

Die bei Bildung von Teilräumen obligate Frage, ob sich eine Eigenschaft auf abgeschlossene (lineare) Teilräume vererbt, ist für BGN- und BGM-Räume zu verneinen: Der in 6.15 b angeführte Raum ist nämlich bornologisch, also ein BGN- und BGM-Raum.

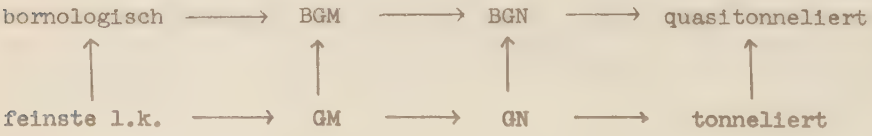
Eine unmittelbare Folgerung aus 8.9 (wobei bei b) 6.14 zu beachten ist) ist:

8.10 KOROLLAR

a) Nicht jeder (quasi)tonnelierte Raum ist ein BGN-Raum.
b) Nicht jeder BGN-Raum (sogar GN-Raum) ist ein BGM-Raum.

Übrigens lässt sich aus 8.10 a ein Teil von 8.9 zurückgewinnen: Denn aus der Tatsache, dass es einen (quasi)tonnelierten Raum E gibt, der kein BGN- bzw. BGM-Raum ist, folgt: Es gibt einen BGM-Raum H mit einem (quasi)tonnelierten Teilraum G, der kein BGN- bzw. BGM-Raum ist. - Dies folgt aus der Standardeinbettung des l.k. Raums E in ein Produkt H von halbnormierten Räumen, welches als Produkt von bornologischen Räumen ein BGM-Raum ist.

8.11 Über die Beziehungen zwischen GN-, GM-, BGN- und BGM-Räumen gibt das folgende Diagramm Auskunft:



ERLÄUTERUNGEN Die Implikationen folgen aus den jeweiligen Definitionen. Alle Implikationen sind nicht umkehrbar, und zwar bis auf "feinste l.k. ⟶ GM" in nichttrivialer Weise, d.h. die Gegenbeispiele sind separiert.

Im folgenden tragen die Beispiele möglichst die schwache Topologie.

Untere Reihe:

feinste l.k. $\neq$ GM : Man nehme einen Raum $E \neq \{0\}$ mit der gröbsten Topologie. Für separierte Räume ist das Problem offen. Ein separierter schwacher Raum ist nicht möglich (6.10 c).

GM $\neq$ GN : Jeder Raum $\mathbb{K}^I$ mit unendlichem I (6.10 b und c).

GN $\neq$ tonneliert : Jeder unendlich-dimensionale normierte tonnelierte Raum (6.10 a). Für Räume mit schwacher Topologie fallen beide Begriffe zusammen (6.10 b).

Vertikale Implikationen:

Ein Beispiel eines bornologischen, nichttonnelierten Raums (z.B. $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ als Teilraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) zeigt, dass alle Implikationen echt sind. Folgende schärfere Aussagen sind möglich:

GN $\neq$ BGN : Es gibt bornologische tonnelierte Räume, die keine GN-Räume sind: Siehe "GN $\neq$ tonneliert".

GM $\neq$ BGM : Es gibt bornologische GN-Räume, die nicht GM-Räume sind, z.B. $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ (vgl. 6.3 , 6.4).

feinste l.k. $\neq$ bornologisch : Wie beim letzten Fall. Die weitere Verschärfung "Es gibt einen separierten bornologischen GM-Raum, der nicht die feinste l.k. Topologie trägt." ist nach 7.6 a nicht möglich.

Obere Reihe:

bornologisch $\neq$ BGM : Es gibt nichtbornologische BGM-Räume, die zugleich GN-Räume sind, z.B. $\prod_{\mathbb{R}}' \mathbb{K} + [b]$, $b_\mu = 1$ für $\mu \in \mathbb{R}$. Nach 6.4 und 8.5 ist dies ein GN- und BGM-Raum, und nach [21; 5.2.] ist er nicht bornologisch (vgl. 8.8 , Beweis).

BGM $\neq$ BGN : Es gibt einen GN-Raum mit schwacher Topologie, der kein BGM-Raum ist - siehe 8.10 b und Beweis von 8.9 b .

BGN $\neq$ quasitonneliert : Es gibt einen tonnelierten Raum, der kein BGN-Raum ist - siehe 8.10 a . Für Räume mit schwacher Topologie fallen beide Begriffe zusammen (8.7).

* * * * * * *

Literatur:

[1] ADASCH, N. : Tonnelierte Räume und zwei Sätze von Banach. Math. Ann. 186, 209 - 214 (1970).

[2] ADASCH, N. : Topologische Produkte gewisser topologischer Vektorräume. Math. Ann. 189, 280 - 284 (1970).

[3] ADASCH, N. : Der Graphensatz in topologischen Vektorräumen. Math. Z. 119, 131 - 142 (1971).

[4] ADASCH, N. : Vollständigkeit und der Graphensatz. J. reine angew. Math. 249, 217 - 220 (1971).

[5] AMEMIYA, I. und KOMURA, Y. : Über nicht-vollständige Montelräume. Math. Ann. 177, 273 - 277 (1968).

[6] BAKER, J. W. : On a generalised open-mapping theorem. Math. Ann. 172, 217 - 221 (1967).

[7] BOURBAKI, N. : Elements of mathematics. General topology, part I. Paris: Hermann 1966.

[8] BOURBAKI, N. : Eléments de mathématique. Livre V . Espaces vectoriels topologiques, chap. I, II . Paris: Hermann 1966 (2. Aufl.).

[9] BOURBAKI, N. : Eléments de mathématique. Livre V . Espaces vectoriels topologiques, chap. III - V . Paris: Hermann 1964.

[10] COLLINS, H. S. : Completeness and compactness in linear topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 79, 256 - 280 (1955).

[11] EBERHARDT, V. : Der Graphensatz von A. P. und W. Robertson für s-Räume. Manuscripta math. 4 , 255 - 262 (1971).

[12] GROTHENDIECK, A. : Sur les espaces (F) et (DF). Summa Bras. Math. 3 , 57 - 123 (1954).

[13] GROTHENDIECK, A. : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[14] HAGEMANN, E. : Das Reziprokentheorem in beliebigen linearen Koordinatenräumen. Math. Ann. 114 , 126 - 143 (1937).

[15] HORVATH, J. : Topological vector spaces and distributions, Vol. I. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1966.

[16] IYAHEN, S. O. : Semiconvex spaces. Glasgow Math. J. 9 , 111 - 118 (1968).

[17] IYAHEN, S. O. : The domain space in a closed graph theorem. J. London Math. Soc. (2) , 2 , 19 - 22 (1970).

[18] IYAHEN, S. O. : On the closed graph theorem. Israel J. Math. 10 , 96 - 105 (1971).

[19] KELLEY, J., NAMIOKA, I. : Linear topological spaces. New York - London - Toronto: D. van Nostrand 1963.

[20] KLEE, V. : Exotic topologies for linear spaces. General topology and its relations to modern analysis and algebra. Proceedings of the Symposium held in Prague in Sept. 1961, New York - London: Acad. Press, Prague: Publ. House of the Acad. of Science 1962.

[21] KOMURA, Y. : On linear topological spaces. Kumamoto J. Sci. Series A, 5 , 148 - 157 (1962).

[22] KOMURA, Y. : Some examples on linear topological spaces. Math. Ann. 153 , 150 - 162 (1964).

[23] KOMURA, T. und KOMURA, Y. : Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations. J. Math. Soc. Japan 15 , 319 - 338 (1963).

[24] KÖTHE, G. : Topologische lineare Räume I. Berlin-Heidelberg--New York: Springer 1966 (2. Aufl.).

[25] MACKEY, G. W. : On infinte-dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 57 , 155 - 207 (1945).

[26] MAHOWALD, M. : Barrelled spaces and the closed graph theorem. J. London Math. Soc. 36 , 108 - 110 (1961).

[27] MOCHIZUKI, N. : On fully complete spaces. Tôhoku Math. J. 13 , 485 - 490 (1961).

[28] NIESSEN, H.-D. : Graphensätze für topologische Räume. Manuscripta math. 1 , 111 - 124 (1969).

[29] PERSSON, A. : A remark on the closed graph theorem in locally convex vector spaces. Math. Scand. 19 , 54 - 58 (1966).

[30] PHUONG - CAC, N. : Sur les espaces parfaits de suites généralisés. Math. Ann. 171 , 131 - 143 (1967).

[31] PIETSCH, A. : Nukleare lokalkonvexe Räume. Berlin: Akademie - Verlag 1969 (2. Aufl.).

[32] PTAK, V. : Completeness and the open mapping theorem. Bull. Soc. Math. France 86 , 41 - 74 (1958).

[33] ROELCKE W., LURJE P., DIEROLF S., EBERHARDT V. : Einige Beispiele über Bairesche, normierte und ultrabornologische Räume. Erscheint demnächst.

[34] SULLEY, L. J. : A note on B- and B_r-complete topological Abelian groups. Proc. Camb. Phil. Soc. 66 , 275 - 279 (1969).

[35] SULLEY, L. J. : On B(t) and $B_r(t)$ locally convex spaces. Proc. Camb. Phil. Soc. 68 , 95 - 97 (1970).

[36] SUMMERS, W. H. : Prodcts of fully complete spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 75 , 1005 (1969).

[37] VALDIVIA, M. : El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Rev. Real Acad. Ciencias Madrid 62 , 545 - 551 (1968).

[38] VALDIVIA, M. : A hereditary property in locally convex spaces. Ann. Inst. Fourier 21 , 1 - 2 (1971).

[39] VALDIVIA, M. : Absolutely convex sets in barrelled spaces. Ann. Inst. Fourier 21 , 3 - 13 (1971).

[40] VALDIVIA, M. : Sobre el teorema de la gráfica cerrada. Erscheint demnächst in Collectanea Matemática.

[41] WINKLER, M. : Linearkompakte topologische lineare Räume. Diplomarbeit 1969 (Universität München).

Lebenslauf

Geburtsdatum: 30.8.1944 .

Geburtsort: Velp / Niederlande .

Schulbildung: 1950 - 1952 Volksschule St. Martin in München;
1952 - 1954 Volksschule in Etterzhausen;
1954 - 1963 Neues Realgymnasium in München.

Studium: 1963 - 1968 an der Universität München: Diplom-Vorprüfung 15.7.1966 ; Diplom-Hauptprüfung 9.7.1968 .

Ich hörte Vorlesungen bei Koecher, Kasch, Faessler, Schmidt, Kulisch, Kellerer, Bopp, Richter, Kerner, Ramspott, Roelcke, Pareigis, Hämmerlin, Wienholtz.

Seit 1.10.1968 bin ich Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten an der jetzigen Fakultät für Mathematik der Universität München.

München, im Juni 1972